SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA PLANO NACIONAL DE FORMAÇÃO DE DOCENTES DA EDUCAÇÃO BÁSICA – PARFOR

MATERIAL DIDÁTICO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

Aluno (a): ___________________________________

Professor: ___________________________________

Turma: ___________________

O Jogo 'Corrida ao 20'

Trata-se de um jogo entre dois oponentes, onde um deles inicia escolhendo entre duas opções - o número 1 ou 2 - sendo que o adversário acrescenta mentalmente uma unidade ou duas, anunciando somente o resultado. O jogo prossegue alternadamente e vence quem obter primeiro o número vinte.

A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS[1]

A teoria das situações didáticas busca criar um modelo da interação entre o aprendiz, o saber e o *milieu* (ou meio) no qual a aprendizagem deve se desenvolver. Foi postulada por Guy Brousseau (1986), pesquisador francês da Universidade de Bordeaux. Discutiremos aqui os fundamentos dessa teoria e seus objetivos. Mais especificamente, discutiremos sobre as noções de: situação didática, situação adidática, situação fundamental, devolução, *milieu* antagonista.

1. APRESENTAÇÃO DA TEORIA DAS SITUAÇÕES

A teoria das situações didáticas foi desenvolvida por Guy Brousseau no intuito de modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos. Para o autor,

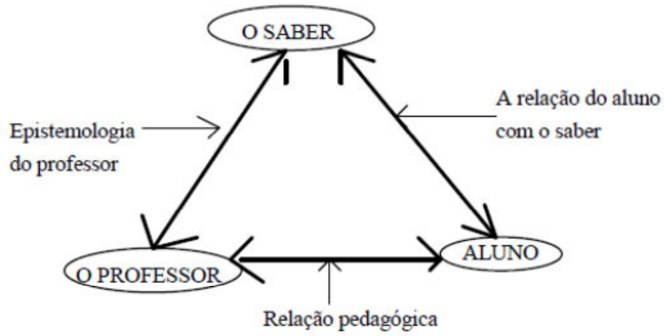
> Um processo de aprendizagem pode ser caracterizado de modo geral (se não determinado) por um conjunto de situações identificáveis (naturais ou didáticas) reprodutíveis, conduzindo freqüentemente à modificação de um conjunto de comportamentos de alunos, modificação característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos. (BROUSSEAU, 1975, p.6).

Dessa forma, o objetivo da **teoria das situações** é caracterizar um processo de aprendizagem por uma série de situações reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos. Essa modificação é característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos, da ocorrência de uma aprendizagem significativa.

O objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática na qual são identificadas as interações estabelecidas entre Professor, aluno e saber. Brousseau (1986) procura teorizar os fenômenos ligados a estas interações, visando a especificidade do conhecimento

[1] Material adaptado pelo Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes de aulas da disciplina, fundamentos da didática da matemática da PUC-SP (elaborado pelo Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud).

ensinado. Para isso, considera como fundamental a estrutura formada pelas interações do **Triângulo Didático**: **Professor**, **alunos** mediadas pelo **saber** nas situações do ensino.



Esquema 1: Triângulo didático

A teoria das situações apóia-se em três hipóteses, que explicitaremos abaixo:

- O aluno aprende adaptando-se a um *milieu* que é fator de dificuldades, de contradições, de desequilíbrio, um pouco como acontece na sociedade humana. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se pelas respostas novas, que são a prova da aprendizagem (Brousseau, 1986, p.49). Esta hipótese é uma referência à epistemologia construtivista de Piaget, segundo a qual, a aprendizagem decorre de processos de adaptação, no sentido biológico do termo, desenvolvidos pelo sujeito frente a situações problemáticas.

- O *milieu* não munido de intenções didáticas é insuficiente para permitir a aquisição de conhecimentos matemáticos pelo aprendiz. Para que haja essa intencionalidade didática, o professor deve criar e organizar um *milieu* no qual serão desenvolvidas as situações suscetíveis de provocar essas aprendizagens.

- A terceira hipótese postula que esse *milieu* e essas situações devem engajar fortemente os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

2. SITUAÇÃO DIDÁTICA E SITUAÇÃO ADIDÁTICA

O objeto central da teoria das situações é a situação didática definida Como:

> O conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo *milieu* (contendo eventualmente instrumentos ou objetos) e

> um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição (BROUSSEAU, 1978, p.).

A situação adidática, como parte essencial da situação didática, é uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a este condições favoráveis para a apropriação do novo saber que se deseja ensinar.

Para Brousseau (1986), uma situação adidática tem as seguintes características:

. O problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria;

. O problema é escolhido para que o aluno adquira novos conhecimentos que sejam inteiramente justificados pela lógica interna da situação e que possam ser construídos sem apelo às **razões didáticas**[2].

. O professor, assumindo o papel de mediador, cria condições para o aluno ser o principal ator da construção de seus conhecimentos a partir da(s) atividade(s) propostas.

Ainda segundo Brousseau (1986, p. 49) cada conhecimento pode ser caracterizado por, pelo menos, uma situação adidática que preserva seu sentido e que é chamada de **situação fundamental**. Ela determina o conhecimento ensinado a um dado momento e o significado particular que esse conhecimento vai tomar do fato tendo em vista as escolhidas das variáveis didáticas e as restrições e reformulações sofridas no processo de organização e reorganização da mesma.

Assim, uma **situação fundamental** constitui um grupo restrito de situações adidáticas cuja noção a ensinar é a resposta considerada a mais adequada/indicada, situações que permitem introduzir os conhecimentos em sala de aula numa epistemologia propriamente científica.

---

[2] O aluno aprende por uma necessidade própria e não por uma necessidade aparente do professor ou da escola.

Uma situação didática se caracteriza pelo jogo de interações do aluno com os problemas colocados pelo professor. A forma de propor esses problemas ao aluno é chamada de **devolução**, e deve ter por objetivo provocar uma interação suficientemente rica e que permita ao aluno desenvolvimento autônomo.

O aluno não distingue de imediato, na situação, o que é de origem **adidática** ou de origem **didática**.

> A concepção moderna do ensino solicita, pois, ao professor que provoque no aluno as adaptações desejadas, por uma escolha judiciosa dos problemas que lhe propõe. Estes problemas, escolhidos de forma a que o aluno possa aceitá-los, devem levá-lo a agir, a falar, a refletir, a evoluir por si próprio. Entre o momento em que o aluno aceita o problema como seu e o momento em que produz sua resposta, o professor recusa-se a intervir como proponente dos conhecimentos que pretende fazer surgir. O aluno sabe perfeitamente que o problema foi escolhido para o levar a adquirir um conhecimento novo, mas tem de saber igualmente que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode construí-lo sem fazer apelo a razões didáticas. (BROUSSEAU, 1986, p. 49).

3. MODELAGEM DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Para analisar o processo da aprendizagem, a teoria das situações observa e decompõe esse processo em quatro fases diferentes, nas quais o saber tem funções diferentes e o aprendiz não tem a mesma relação com o saber. Nessas fases interligadas, podem-se observar tempos dominantes de ação, de formulação, de validação e de institucionalização.

Brousseau modela as situações adidáticas em termos de jogo. Uma situação susceptível de provocar uma aprendizagem será tal que o aluno dispõe de uma estratégia básica para começar a jogar. Tal estratégia deve permitir ao sujeito compreender o problema e as regras do jogo. No entanto as retroações fornecidas pelo *milieu* lhe permitem também perceber que essa estratégia não permitirá ganhar o jogo ou então que seu custo didático ou cognitivo é muito grande. Uma estratégia ótima deveria ser criada ou viabilizada utilizando-se conhecimento visado.

Uma situação didática é caracterizada pelo *milieu*, e este é organizado a partir da escolha das **variáveis didáticas**, que são aquelas para as quais a mudança de valores provoca modificações nas estratégias ótimas, o que a torna um ponto importante no estudo de modelos de aprendizagem segundo a Teoria das Situações. Uma mudança significativa nos valores assumidos por certas variáveis é chamada **salto informacional**, e pode levar a uma mudança qualitativa nas estratégias pertinentes para resolver o problema. A determinação dessas variáveis e o valor do salto a ser efetuado para potencializar a aprendizagem são pontos marcantes na construção das situações. Uma primeira escolha da(s) variável(eis) e os valores a serem assumidos por elas pode servir à **devolução** do problema e ao encaminhamento de uma estratégia básica. Novas escolhas se farão necessárias (tanto de valores das mesmas variáveis já em jogo como de outras variáveis) para o desenvolvimento da situação adidática pretendida.

3.1 DIALÉTICA DA AÇÃO

Ela consiste em colocar o aprendiz numa situação, chamada situação de ação, tal que:

- coloca um problema para o aluno cuja melhor solução, nas condições propostas, é o conhecimento a ensinar;
- o aluno possa agir sobre essa situação e que ela lhe retorne informações sobre sua ação.

Uma boa situação de ação não é somente uma situação de manipulação livre ou que exija uma lista de instruções para seu desenvolvimento. Ela deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre, graças à retroação do *milieu.* Assim, o aluno pode melhorar ou abandonar seu modelo para criar um outro: a situação provoca assim uma aprendizagem por adaptação.

Essa fase é essencial para o aluno exprimir suas escolhas e decisões por ações sobre o *milieu*. Nela, as interações estão centralizadas na tomada de decisões, embora possa haver trocas de informações (se os alunos trabalham em grupo, os conhecimentos dos elementos desse grupo fazem parte do *milieu* de cada um dos alunos, propiciando, portanto retroações), mesmo que não sejam necessárias à ação. Os alunos dispõem das mesmas informações e as decisões são orientadas pelas retroações do *milieu*.

3.2 DIALÉTICA DA FORMULAÇÃO

Nesta fase de uma situação adidática, o aluno troca informações com uma ou várias pessoas, que serão os emissores e receptores trocando mensagens escritas ou orais. Estas mensagens podem estar redigidas em língua natural ou matemática, segundo cada emissor. Como resultado, essa dialética permite criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns, já conhecidas ou novas. É o momento em que o aluno ou grupo de alunos explicita, por escrito ou oralmente, as ferramentas que ele utilizou e a solução encontrada.

O objetivo da dialética da formulação é a troca de informações. Por exemplo, se o aluno deve agir e não dispõe de toda a informação e se seu parceiro no jogo dispõe das informações que lhe faltam, pode haver, nessas trocas, julgamentos, debates de validade, sem que isto constitua necessariamente uma situação de formulação.

A dialética de formulação segundo Brousseau, consiste em proporcionar ao aluno condições para que este construa, progressivamente, uma linguagem compreensível por todos, que considere os objetos e as relações matemáticas envolvidas na situação adidática.

> Uma dialética da formulação consistiria em desenvolver progressivamente uma linguagem compreensível por todos e que leva em conta os objetos e as relações pertinentes da situação de forma adequada (isto é, permitindo raciocínios úteis e ações). A cada instante esta linguagem construída será testada do ponto de vista de sua inteligibilidade, da facilidade de construção, do tamanho das mensagens que se pode trocar. A construção ou código (repertório, vocabulário, algumas vezes a sintaxe) em língua natural ou linguagem formal torna possível a explicitação das ações e dos modelos de ação. (BROUSSEAU, 1998, p.36)

3.3 DIALÉTICA DE VALIDAÇÃO

É a etapa na qual o aprendiz deve mostrar a validade do modelo por ele criado submetendo a mensagem matemática (modelo da situação) ao julgamento de um interlocutor. De um lado, o emissor deve justificar a exatidão e a pertinência de seu modelo e fornecer se possível, uma validação semântica e sintática. O receptor, por sua vez, pode pedir mais explicações ou rejeitar as mensagens que não entende ou discorda, justificando sua rejeição. Assim, a teoria funciona, nos debates científicos e nas discussões entre alunos, como *milieu* de estabelecer provas ou de refutá-las.

3.4 DIALÉTICA DE INSTITUCIONALIZAÇÃO

Em sua primeira formulação, a teoria só possuía as três primeiras etapas. A evolução nas discussões e utilizações dessa teoria foi enriquecida com as noções de contrato, institucionalização entre outras. As situações da institucionalização foram assim definidas como aquelas em que o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber. Uma vez construído e validado, o novo conhecimento vai fazer parte do patrimônio matemático da classe, embora não tenha ainda o estatuto de saber social:

- se feita muito cedo, a institucionalização interrompe a construção do significado, impedindo uma aprendizagem adequada e produzindo dificuldades para o professor e os alunos;

- quando feita após o momento adequado, ela reforça interpretações inexatas, atrasa a aprendizagem, dificulta as aplicações.

- é negociada numa dialética.

Depois da institucionalização, feita pelo professor, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-o assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos.

A MATEMÁTICA BABILÔNICA E EGÍPCIA (EVES, 2004)

A geometria babilônica se relacionava intimamente com a mensuração prática. De numerosos exemplos concretos infere-se que os babilônicos do período 2000 a.C. a 1600 a.C. deviam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, da área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles (e talvez da área de um triângulo genérico), da área de um trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto-retângulo e, mais geralmente, do volume de um prisma reto de base trapezional. Considerava-se uma circunferência como o triplo de seu diâmetro e área do círculo como um duodécimo da área do quadrado de lado igual a circunferência respectiva.

1850 a. C. é a data aproximada do papiro de Moscou, um texto matemático que contém 25 problemas já antigos quando o manuscrito foi compilado. O papiro que foi adquirido no Egito em 1893 agora se encontra no museu de belas-artes de Moscou.

1650 a. C. é a data aproximada do papiro de Rhind, um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. O papiro foi adquirido no Egito pelo egiptólogo escocês Henry Rhind, sendo mais tarde comprado pelo museu britânico. Esse papiro e o papiro de Moscou são nossas principais fontes de informação referentes à Matemática egípcia antiga.

Vinte e seis dos 110 problemas dos papiros de Moscou e Rhind são geométricos. Muitos deles decorrem de fórmulas de mensuração necessárias para o cálculo de áreas de terra a volume de grãos. Assume-se que a área de um círculo é igual à de um quadrado de lado igual a 8/9 do diâmetro. Investigações recentes parecem mostrar que os egípcios sabiam calcular a área de um triângulo qualquer.

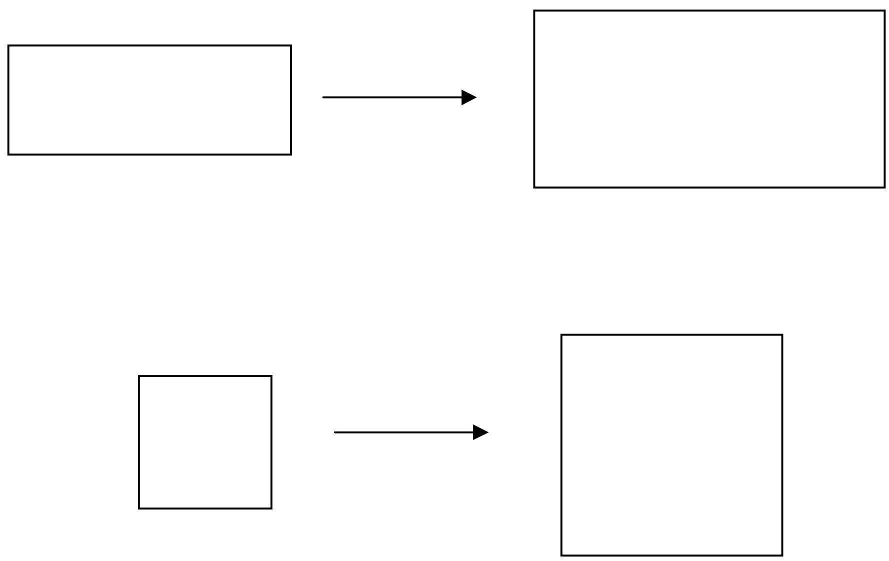
Área do círculo unitário

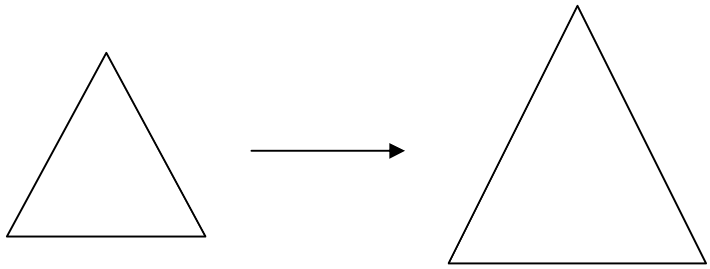
1. Calcule, a partir do texto, a área do círculo unitário de acordo com os procedimentos babilônicos e egípcios.

2. Inscrevessem um círculo unitário num quadrado de lado igual ao diâmetro do círculo unitário; dividindo cada lado do quadrado em 3 partes iguais e a partir dos nove novos quadrados formados, obtenha uma estimativa para a área do círculo.

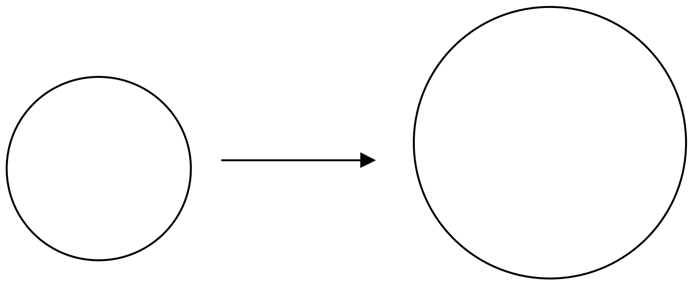
A razão de semelhança entre áreas

1. Indique as dimensões das figuras menores a partir destas dimensões escolha um fator de multiplicação para ampliar igualmente cada uma das dimensões. Em seguida calcule as áreas de cada figura e a razão entre a maior área e a menor. Na sequência calcule a área maior em função da menor, escrevendo em forma de potência o número de vezes que a maior excede a menor.





2. Apoiando-se no texto proceda da mesma forma anterior para um círculo de raio unitário.



Análise da situação

1. Podemos classificar a situação anterior como a-didática? Justifique.

2. Caso afirmativo identifique as fases da situação a-didática na questão.

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodoes de la Didactique des Mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 1986. v.7.2, p.33-115.

----------- Théorie des situations didactiques. Textes rassemblés et préparés par Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland, Virginia Warfield. Grenoble : la Pensée Sauvage Éditions, 1998. Col. Recherches en didactiques des mathématiques.

----------- Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques.Thèse d'état, Université de Bordeaux I, 1986.

---------- Théorie des situations didactiques. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1998.

--------- Exposé au colloque .L´analyse de la didactique des mathématiques. (13-15 mars 1975). Compte rendu publié par l´IREM de Bordeaux, 1975.

--------- L´observation des activités didactiques. Revue Français de Pedagogie, v.45 (oct. 78), p.130-139, 1978.

DIALÉTICA FERRAMENTA-OBJETO E JOGOS DE QUADROS

Segundo Douady (1993), o saber matemático reveste um duplo aspecto. Por um lado se faz necessário a disponibilidade funcional de certas noções e teoremas matemáticos para resolver problemas e interpretar novas questões. Tais características atribuem segundo a autora um estatuto de *ferramenta* aos conceitos matemáticos em estudo. Essas ferramentas devem estar inseridas em um contexto o qual dará sentido as noções matemáticas. Por outro lado este saber é identificado pelas noções e teoremas como elemento de um corpo cientificamente e socialmente reconhecido, tal que poderemos formular as definições, enunciar os teoremas e demonstrá-los, nesses termos a autora afirma que os conceitos em estudo apresentam o estatuto de *objeto* descontextualizados e despersonalizados.

Assim cabe ao professor criar as condições que produzirão um saber entre os alunos, de forma a engajá-los em atividades intelectuais, pelas quais se favoreça a disponibilidade de um saber com seu duplo estatuto de *ferramenta* e *objeto*.

O jogo de quadros postulado por Douady (1986), traduz a intenção de explorar o fato que a maior parte dos conceitos matemáticos podem ser apresentados em diversos quadros, ou seja, em diversos domínios: algébrico, geométrico, numérico, gráfico e outros, a mudança de quadro possibilita ao aluno representar um mesmo objeto em quadros diferentes assim poderá mobilizar outras ferramentas cognitivas na resolução.

Para Almouloud (2007) do ponto de vista epistemológico, a dialética ferramenta-objeto e as mudanças de quadros tornam-se instrumentos poderosos de análise, porque permitem uma leitura diferenciada da evolução de noções matemáticas e, também, uma análise da aprendizagem efetivamente existente.

A partir da dialética ferramenta-objeto, a autora propõe, então, uma organização de ensino em várias etapas relacionadas (DOUADY, 1984; DOUADY, 1994; MARANHÃO, 1999; ALMOULOUD, 2007) referenciadas a seguir:

Na primeira etapa os *esquemas*[1] já adquiridos pelos alunos são mobilizados para auxiliarem os discentes na resolução do problema proposto, ou pelo menos para solucioná-lo parcialmente, essa fase Douady denomina de *antigo*.

Na segunda etapa, denominada de *pesquisa*, os discentes apresentam dificuldades para dar sequência e consequentemente concluírem a atividade posta, devido não terem, ainda, se apropriado da ferramenta que é representada pelo objeto de ensino.

Não podemos afirmar que os alunos dispõem de conhecimentos adequados para apresentarem uma estratégia que lhes propiciem resolverem o problema, mas podemos conjecturar que eles dispõem de determinados princípios e explicações restritas a situação em voga. E que os conceitos, assim, construídos pelos alunos durante esta fase são raramente explicitados, conjecturamos que provavelmente nessa fase possamos identificar os conhecimentos em ação (conceitos e teoremas em ação) postulados por Vergnaud (1996).

Vergnaud esclarece que as situações e as representações são associadas intimamente com a atividade das quais emergem os objetos matemáticos culturalmente definidos, ou seja, consideram necessários sublinhar a relação diabética entre a atividade e o conceito. O conceito seria o que é emergente deste sistema de práticas (GODINO, 2003).

Na terceira etapa, denominada de *explicitação ou institucionalização local* (ALMOULOUD, 2007), os discentes expõem seus resultados sobre a problemática em questão relatando seus pontos de vistas, anseios e dificuldades emergidos durante o processo de resolução.

As ideias de Lakatos (1978) podem, nos fornecer indícios que a solução de problemas nessa concepção apresenta *status* de pesquisa científica, em particular matemática. Tais problemas quando propostos em sala de aula no qual o discente deve propor soluções que serão testadas, criticadas, refutadas. E de acordo com a convergência ou divergência das ideias as soluções podem ser substituídas por outras e o conhecimento novo se dá por meio dessa adaptação.

[1] Em sua tese Douady (1984) adota como hipótese as idéias de Piaget sobre a aquisição de conhecimento.

O aluno adquire conhecimento, então, adaptando-se a um *milieu* que lhe possibilite conjecturar de forma explicita os problemas que lhe são postos expondo suas dificuldades confrontando opiniões divergentes que possam lhe levar a mudar de estratégia ou mesmo lhe garantir que seus procedimentos estão adequados. De tal sorte que o saber, originado por esta adaptação, aparecerá quando a solução de problema emergir de todo o processo regulado pela situação.

O que converge com os pressupostos de Brousseau (1996) ao afirmar que o trabalho do aluno deve ser, no ato da recontextualização projetada pelo professor, comparável a uma atividade científica apontando que uma boa reprodução pelo aluno de uma atividade científica “exige que ele aja, formule, prove, construa modelos, linguagens, conceitos, teorias os troque com os outros colegas [...]” (BROUSSEAU, 1996, p. 38).

Na institucionalização local podemos evidenciar que o saber é constituído a partir das discussões, das idéias compartilhadas, da possibilidade de se corrigirem os erros confrontando as idéias sobre um mesmo tema. Assim o objeto matemático será reconhecido nesta fase.

> [...] o objetivo desta fase é dar um estatuto de objeto aos conhecimentos que foram utilizados como ferramenta, como condição para a homogeneização e a constituição do saber da classe, além de situar o saber e promover seu progresso (ALMOULOUD, 2007, p.63).

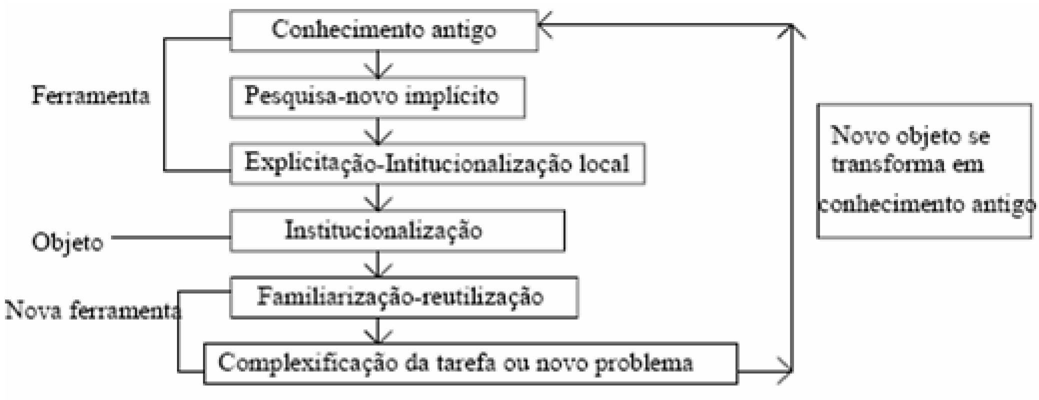
Na quarta etapa, denominada *institucionalização*, o que foi institucionalizado localmente deve assumir um *status* mais generalista, para tanto o professor deve descontextualizar (ALMOULOUD, 2007) o que for mais relevante do conteúdo em estudo, para servir de ferramenta na resolução de outros problemas.

Na quinta etapa, denominada *familiarização* Douady (1975) afirma que devemos fornecer aos alunos problemas variados destinados a evidenciar que o objeto, em estudo, adquira a funcionalidade de ferramenta, explicitando o que foi institucionalizado de forma que tais problemas: simples ou complexos ponham em jogo o que foi estudado. A variedade dos exercícios sugeridos proporciona constantes retomadas dos conceitos vistos anteriormente, de forma que esse ir e vir possibilita a revisão e a fixação dos conceitos.

Para Almouloud (2007) “[...] o novo objeto torna-se, então, conhecimento *antigo* para ser utilizado em um novo ciclo da dialética ferramenta-objeto”.

Numa última etapa, o que nos resta é utilizar o conhecimento emergido da situação em situações mais complexas que impliquem que outros conceitos sejam estudados, visando uma nova aprendizagem e a proposta de problemas cíclicos está erigida.

De acordo com Almouloud (2007) a dialética ferramenta-objeto pode ser esquematizada da seguinte maneira:



Configuração das fases segundo Almouloud (2007)

Algumas condições são propostas por Douady (1989) para que os problemas se enquadrem na dialética ferramenta-objeto.

a) O enunciado deve estar dentro do campo de conhecimento do aluno. Como, por exemplo, em uma questão que precisamos evidenciar a relação do teorema de Pitágoras a partir de lúnulas ou lunas[2] (construídas nos catetos de um triângulo retângulo) os alunos precisam saber calcular as áreas de semicírculos e triângulos, assim como ter domínio em operações algébricas.

b) O aluno deve poder encarar que ele pode ser o responsável pelo problema. A atitude que esperamos que nossos alunos assumam diante das tarefas propostas é regida por uma espécie de contrato informal o qual é postulado por Brousseau.

[2] Figura geométrica formada a partir de dois arcos de círculo que se tocam nas extremidades e cuja convexidade se volta para o mesmo lado.

O contrato didático postulado por Guy Brousseau pode garantir a aceitação, por parte do aluno, do problema apresentado a esse. Tal contrato:

> [...] deve estabelecer uma relação que determina explicitamente em pequena parte, mas, sobretudo implicitamente aquilo que cada parceiro, o professor e o aluno têm a responsabilidade de gerir e pelo qual será de uma maneira ou de outra, responsável perante o outro (BROUSSEAU, 1996, p.51).

Sabemos que o contrato não se limita a regras de comportamento de professor e aluno, mas nesse item é o que devemos destacar, ou seja, a aceitação da atividade proposta pelo professor contará com a responsabilidade discente de resolver os problemas cuja solução não lhe foi ensinada.

c) Tendo em conta os seus conhecimentos, os alunos podem engajar procedimentos e argumentações que o conduzam a questionamentos sobre o problema, em questão, que eles não sabem responder de imediato.

Podemos possibilitar, a nossos alunos atividades nas quais eles possam se adaptar de tal sorte que os conhecimentos emergirão como a solução que lhe garanta um novo saber.

> Estes problemas, escolhidos de forma a que o aluno possa aceitá-los, devem levá-lo a agir, a falar, a refletir, a evoluir por si próprio. Entre o momento em que o aluno aceita o problema como seu e o momento que produz a sua resposta, o professor recusa-se a intervir como proponente dos conhecimentos que pretende fazer surgir (BROUSSEAU, 1996, p.49).

Sabemos que tais conhecimentos, só serão assimilados verdadeiramente quando os discentes puderem aplicá-lo por si próprio a situações com que depara tanto dentro quanto fora do contexto do ensino.

d) O problema deve ser rico. Isso implica que a teia de saberes envolvidos no conceito é muito importante e diversificada, mas não tanto que o aluno não possa gerenciar sua complexidade, ao menos em parte, ou com auxílio dos colegas do grupo ou da turma.

e) O problema deve ser aberto: Para fazer emergir a diversidade de questionamentos que os alunos podem expor a diversidade de estratégias que eles podem por em jogo e para que os discentes possam experenciar as incertezas que o resultado origina. Assim seus *esquemas* sofrerão desequilíbrios e posteriores equilíbrios para que possam acomodar novos conceitos.

f) O problema pode ser formulado em ao menos dois quadros diferentes.

Vale ressaltar a diferença entre a *mudança de quadro* e o *jogo de quadros* Almouloud destaca que Douady conjectura que a mudança de quadros é relacionada ao tratamento de questões matemáticas, ou seja:

> [...] é um meio de obter formulações diferentes para um problema que, sem serem necessariamente equivalentes, permitem ter uma nova visão para as dificuldades encontradas, disponibilizando ferramentas e técnicas que não transparecem em uma primeira formulação. . E o jogo de quadros está associado a mudança de ponto de vista necessária para mobilizar outras ferramentas de resolução, por exemplo (DOUADY apud ALMOULOUD, 2007, p. 65).

O jogo de quadros traduz a intenção da autora de explorar o fato que grande parte dos conceitos, em matemática, pode interagir em diversos domínios: geométrico, numérico, gráfico e outros. O que segundo a autora suscitará aos discentes a necessidade de lançar mão de outros domínios de conhecimentos matemáticos, a fim de solucionarem o problema e assim fazer evoluir as concepções dos alunos sobre o objeto em estudo.

g) O conhecimento visado pela aprendizagem é um meio cientifico de responder eficazmente ao problema. (é uma ferramenta adaptada)

A situação visa apresentar ao aluno um conhecimento estabelecido pela comunidade científica, ou seja, a situação gera um saber local que após ser institucionalizado terá um caráter universal aceito pelo meio social.

Articulação entre Quadros Registros e Ponto de Vistas

A linguagem específica da matemática, por si só, pode gerar obstáculos para sua aquisição, em virtude de trabalhar com objetos abstratos. Assim, os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando para sua apreensão o uso de uma representação. Neste caso as representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos são bastante significativas, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de representações diferentes de um mesmo objeto matemático, ou mesmo a dualidade de representações semióticas. (DAMM, 1999)

De um modo geral o estudo da Geometria, enfatiza a compreensão da relação com o espaço e as atividades geométricas com seus diferentes registros de representação semiótica estas representações nos auxiliam no processo de aquisição conceitual, de acordo com Damm (1999).

> A apreensão conceitual dos objetos matemáticos somente será possível com a coordenação pelo sujeito que aprende de vários registros de representação. Ou seja, quanto maior for a mobilidade com registros de representações diferentes do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão deste objeto (DAMM, 1999 p.144).

A compartimentalização dos conteúdos em tópicos dificulta o processo de identificação de registros do mesmo objeto, não levando em consideração os diferentes níveis de abstração e de generalização. Apresentando os conceitos isoladamente e desconexos, sem se relacionarem aos conceitos pré-estabelecidos pelos alunos (NUNES, 2007).

Estes fatores nos levam a propor um contexto que articule as concepções de quadro, registros e ponto de vista. Por meio de atividades que favoreça o aluno a se apropriar de conceitos matemáticos que estejam representados em vários registros de representação de forma a possibilitar as devidas mudanças de quadros e de ponto de vista.

> A expressão “ponto de vista” deve ser entendida como uma maneira de definir ou caracterizar um objeto matemático e/ou suas propriedades, [...] olhar um objeto em diferentes quadros

> é ter diferentes pontos de vistas, embora se possam ter diferentes pontos de vistas do mesmo quadro (ALMOULOUD, 2007, p. 81).

Por exemplo, **resolva a equação $X^2 - 5X + 6 = 0$, sem utilizar a fórmula de Baskhara. Essa solução otimiza a solução? Justifique.**

Prove o Teorema de Pitágoras por semelhança de triângulos e por meio das áreas construídas sobre os lados do triângulo. Identifique mudança de quadro, ponto de vista e registro das questões sugeridas?

As noções de quadros e registros apresentam olhares diferentes para os objetos matemáticos em quanto uma focaliza a resolução de problemas a outra tem seu foco de forma genérica nos a do tratamento que se encontra em toda resolução de problemas. Essa afirmativa a qual comungamos com Almouloud é indagada pelo próprio Duval.

> [...] falar em termos de quadro ou falar em termos de registros parece falar da mesma coisa, dando mais importância ao conteúdo matemático a sua representação semiótica. Ou seja, existiria um certo paralelismo entre uma análise em termos de quadros e uma análise em termos de registros? (DUVAL apud ALMOULOUD, 2007, p. 78).

Bem sabemos que Duval postula que à compreensão em matemática, de forma global, implica na capacidade de coordenar os vários registros de um mesmo objeto, tendo o devido cuidado para não confundir um objeto e sua representação. Não obstante, o conhecimento específico de conceitos matemáticos em seus quadros e mudanças de ponto de vistas, são ferramentas poderosas e um ponto da partida, nas mãos de que ensina matemática, tendo como finalidade ascender a níveis mais elevados de complexidade a respeito da natureza dos objetos estudados. A esse respeito nossa tese coaduna com a de Almouloud (2007, p. 88) ao afirmar que.

> Para compreender um conceito é necessário saber em que quadros ele funciona e compreender os pontos de vista que lhes são associados. Para provar teoremas ou resolver problemas, a mudança de quadros e a escolha judiciosa de registros de representação são fundamentais no cumprimento da tarefa pedida, além de serem fundamentais na distinção entre o objeto matemático (conceito) e suas diferentes representações num dado registros.

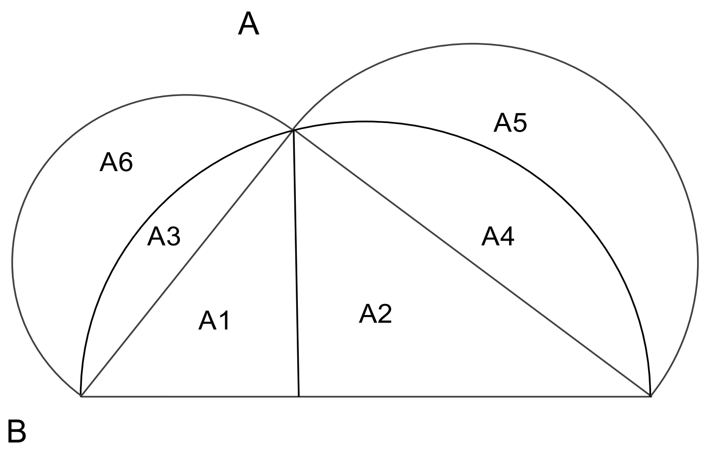
Nesse contesto, ofereceremos mais uma sugestão de situação problema visando apresentar o conhecimento geométrico de maneira mais ampla e diversificada possível de modo que os diferentes quadros, os diferentes pontos de vistas e as várias representações de objetos matemáticos sejam postos, favorecendo a aquisição de competências, pelos alunos, que lhes conduzam a resolver problemas que lhes tenham significados.

Nesse sentido acreditamos que atividades com perspectiva histórica epistemológica é uma forma de mostrar ao aluno o aspecto construtivo da matemática, assim podemos chegar a generalizações de fórmulas a partir da contextualização das idéias.

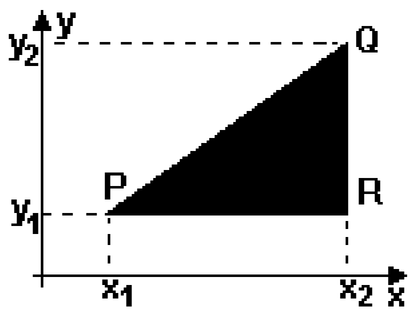
Conforme tais proposições vejam como as tentativas de quadratura do círculo podem contribuir para a formulação de um conhecido teorema da matemática. Segundo Eves (2004) é provável que nenhum outro problema tenha exercido um fascínio maior ou mais duradouro do que construir um quadrado de área igual à área de um círculo. Hipócrates de Quios teve sucesso na quadratura de certas lunas especiais ou figuras, em forma de lua, limitadas por dois arcos de circunferência. Provavelmente na expectativa que de que suas investigações pudessem o levar a solução da *quadratura do círculo*.

Hipócrates demonstrou um teorema importante em suas investigações Segmentos semelhantes de círculos estão na mesma razão que os quadrados de suas bases e demonstrou que esse resultado mostrando que os quadrados obtidos com diâmetros estão na mesma proporção que os círculos (BOYER, 2003).

Partindo desse princípio Hipócrates conseguiu chegar à seguinte quadratura; a área do triângulo T = A1 + A2 é igual à soma das áreas das lunas A5 e A6. Considerando os lados dos triângulos AB, AC e BC e tomando como verdadeira a conjectura de Hipócrates **qual a relação matemática que envolve esses lados?**



Determine a distância **d** entre os pontos P e Q?



Identifique os quadros que as situações-problema anteriores envolvem. Assim como as noções matemáticas que se apresentaram como ferramenta e aquelas que foram objetos.

- . O quadro geométrico: ....
- . O quadro algébrico: ....
- . O quadro da geometria analítica: ....
- O quadro numérico: ....

REFERENCIAS

ALMOULOUD, A. S. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

BOYER, C. B. **História da matemática.** 2. ed. trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher,2003.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didática da matemática In: **Didáctica das matemáticas**, Direção: Jean Brun. Coleção horizontes pedagógicos; Instituto Piaget, Lisboa, 1996.

DAMM, R. F. Registros de Representação. In: MACHADO, S. D. A. et al. **Educação Matemática: uma introdução** São Paulo: Educ,1999.

DOUADY, R. (1993). **L´ingénierie didactique, un moyen pour l´enseignant d´organiser les rapports entre l´enseignement et l´apprentissage**. Cahier de DIDIREM. Paris: IREM-Université Paris VII, v.19$_1$.

DOUADY, R.(1989). **Rapport Enseignement Apprentissage : Dialectique outil-objet, Jeux de cadres**. Cahier de Didactique des Mathematiques. Paris, Université Paris VII, n. 3, 1989.

DOUADY, R. **Jeux dês cadres et dialectique outil-objet dans l' enseigne,ent dês mathématiques**. Thèse de Doctorat d'Etat (specialité didactique dês mathématiques). Paris, Université Paris VII, 1984.

EVES, H**. Introdução à história da Matemática.** Tradução. Higino H. Domingues. Campinas, SP: ed. da Unicamp, 2004.

GODINO, J. D. **Teoría de las funciones semióticas**: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada, 2003.

LAKATOS, I. **A Lógica do Descobrimento Matemático:** Provas e Refutações. Trad. Nathanael C. Caixeiro, Zahar Editores, Rio de Janeiro, 1978.

MARANHÃO, M. C. S. Dialética-Ferramenta-Objeto. In: MACHADO, S. D. A. et al. **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: Educ,1999.

NUNES, J. M. V. **História da Matemática e Aprendizagem Significativa da Área do Círculo: Uma Experiência de Ensino-Aprendizagem.** Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemáticas). Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, UFPA, Belém, 2007.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais In: **Didáctica das matemáticas**, Direção: Jean Brun. Coleção horizontes pedagógicos; Instituto Piaget, Lisboa, 1996.

REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE RAYMOND DUVAL

Em matemática, toda comunicação se estabelece com base em representações, os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, portanto, para seu ensino, precisamos levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático. Um dos primeiros passos a ser dado é a compreensão do que seriam essas representações essenciais ao funcionamento do conhecimento e ao desenvolvimento dos conhecimentos.

Os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, o acesso a esses objetos passa, necessariamente, por representações semióticas (forma sob a qual a informação é descrita). Raymond Duval, filósofo e psicólogo francês, no seu livro *Sémiosis et penssée humaine*, Berne: Peter Lang, 1995 fornece um referencial estruturado de análise do funcionamento cognitivo da compreensão em matemática através da Teoria dos Registros de Representações Semióticas.

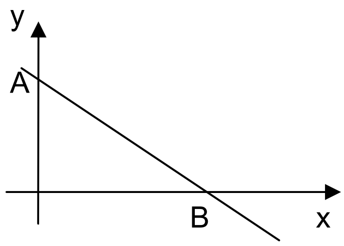
Em suas contribuições teóricas Raymond Duval postula a respeito dos **registros de representação semióticos**. Esse autor afirma que a atividade cognitiva requerida pela matemática é diferente daquelas requeridas em outros domínios do conhecimento, e esta diferença deve ser procurada em duas características: na importância das **representações semióticas**, ou seja, as possibilidades de tratamento matemático dependem do sistema de representação utilizado e de que os objetos matemáticos não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos e na **grande variedade de representações** semióticas utilizadas na matemática: sistemas de numeração, figuras geométricas, escritas algébrica e formais, representações gráficas e a linguagem natural.

Os diferentes tipos de representações semióticas mobilizáveis no funcionamento matemático são designados por ele de “registro de representação” e classificados em quatro tipos: dois relativos à **representação discursiva** (linguagem natural e os sistemas de escritas); e **representação não-discursiva** (registro figural e registro gráfico).

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritimizáveis	Língua natural Associação verbal (conceituais). Forma de raciocinar: Argumentação a partir de observações, de crenças...; dedução válida a partir de definições ou teoremas	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configuração em dimensão 0, 1, 2 ou 3). Apreensão operatória e não somente em perspectiva; Constrição com instrumentos
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algorítmos	Sistema de escritas: Numérica (binária, decimal, fracionária...); Algébricas; Simbólicas (figuras formais), cálculo.	Gráficos cartesianos. Mudanças de sistemas de coordenadas; Interpretação, extrapolação.

Ex1: Um registro pode dar origem a outros registros. Por exemplo, o registro numérico pode dar origem, ao registro numérico decimal, ao registro numérico fracionário, etc.: $2 = 2{,}0 = 2/1$.

Ex2:

Registro em língua natural	Registro de sistema de escritas (registro simbólico)	Registro figural	Registro gráfico
Considere a reta que passa pelo ponto A e B.	$\overleftrightarrow{AB}$	$A \longleftrightarrow B$	

Duval postula que a compreensão da matemática se deve a coordenação de ao menos dois registros, ou seja, para toda a análise do funcionamento cognitivo da compreensão existem dois tipos diferentes de transformações de representações semióticas: aqueles que permanecem dentro do mesmo sistema denominado **tratamento (Exs: 3 e 4)** e aqueles que mudam de registros ou sistemas, mas que conservam a referência aos mesmos objetos dito **conversão**[1] **(Exs: 1 e 2)**. Duval (2003) afirma que a

[1] **Do ponto de vista matemático** a conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro.

compreensão em matemática implica na capacidade de mudar de registro, e também em saber explicar as propriedades ou aspectos diferentes de um mesmo objeto matemático, em suas diferentes representações[2].

Como exemplo (**3**), temos a seguinte equação $N'(t) = 2000 - 1500e^{-0,05t}$ $(0 \le t \le 60)$ que representa a taxa de crescimento N'(t) de vendas de computadores de uma companhia. E para encontrar a equação N(t) que representa o número total de computadores que se espera vender em t meses é necessário integrar a equação dada para em seguida determinar a quantidade vendida em 12 meses.

$N'(t) = 2000 - 1500e^{-0,05t}$
$N(t) = 2000t - 3000e^{-0,05t} - 3000$
$N(12) = 10464$ unidades

Identificando como **conversão** a tradução da linguagem natural do número total de computadores que se espera vender em t meses pela representação N(t) e igualmente a conversão da expressão a taxa de crescimento por N'(t).

Os tratamentos ocorreram em todos os passos que constituíram a técnica dentro de um registro algébrico. As transformações foram quase algorítmicas segundo as técnicas do cálculo da integral indefinida e de equações diferenciais com um problema do valor inicial.

Na realidade o uso apenas de um registro de representação, teremos a grande probabilidade de confundir a representação com o objeto matemático representado.

No cálculo diferencial e integral, há um grande privilégio do uso de registros monofuncionais (tratamento) e o sentido língua natural $\rightarrow$ registro algébrico $\rightarrow$ registro gráfico é muitas vezes privilegiado e raras vezes o contrário acontece para o aluno de cálculo.

---

[2] A compreensão em Matemática implica a capacidade de mudar de registro, porque **não se deve confundir um objeto e sua representação -** É a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em Matemática, e não o inverso, ou seja, o "enclausuramento" em cada registro.
.

Para encontrar as raízes de uma equação (**4**) do primeiro ou segundo grau procedemos a um tratamento, mas ao solicitarmos a representação gráfica de tais equações procederemos a uma conversão. Vale destacar a importância da conversão gráfica a algébrica, ou seja, dada a representação gráfica encontrar a lei de formação que a defini.

A atividade de conversão colocará em evidência o fenômeno da congruência ou da não congruência. Isto acontece porque dois registros de representação serão congruentes se obedecerem aos três critérios seguintes: correspondência semântica das unidades de significado, univocidade semântica terminal, mesma ordem das unidades de significado no registro de partida e no de chegada. A congruência ou não congruência entre dois registros de representação pode tornar a atividade de conversão mais ou menos complexa. Além do mais, os registros de representação podem ser congruentes num sentido e não o serem no sentido inverso. É o caso, por exemplo, das funções: pode-se ter congruência na passagem da linguagem algébrica para o gráfico cartesiano e não ter congruência na passagem inversa.

Representações congruentes: Observe as representações a seguir. Há uma correspondência termo a termo entre os dois registros. Dizemos nesse caso que as duas representações **são congruentes**.

Registro em língua natural	Registro de sistema de escritas (registro simbólico)
O conjunto dos pontos do plano cartesiano que têm a abscissa maior que zero.	$X > 0$

Observe que no exemplo a seguir não há uma correspondência termo a termo entre os dois registros. Pertencer ao eixo y implica ter abscissa igual a zero. Uma reorganização da expressão dada do registro de partida é necessária para obter a expressão correspondente do registro de chegada. Dizemos que neste caso as duas representações **não são congruentes**.

Registro em língua natural	Registro de sistema de escritas (registro simbólico)
O conjunto dos pontos do plano cartesiano que pertencem ao eixo y.	X = 0

Duval sugere que na elaboração de uma sequência de atividades duas condições devem ser respeitadas: ela deve ser constituída de uma série de tarefas que tratam dos **dois sentidos da conversão**; além disso, para cada sentido da conversão deve haver tarefas que comportem casos de congruência e casos de não congruência.

Segundo Duval (1995) a conversão que é necessária para a conceitualização não deixa de enfrentar o fenômeno de congruência ou de não-congruência entre as representações de um mesmo objeto que originam-se de sistemas semióticos diferentes. É esse fenômeno que pode explicar os sucessos ou os insucessos dos alunos frente às questões que implicam uma mudança de sistema semiótico de representação, dependendo da congruência ou não-congruência. Por outro lado, essa passagem se faz espontaneamente quando eles são congruentes. Como já foi destacado, existem três condições a serem satisfeitas para que dois sistemas semióticos de representação sejam congruentes:

a) correspondência semântica entre unidades significantes que as constituem;
b) mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações;
c) conversão de uma unidade significante da representação de partida a uma só unidade significante na representação de chegada.

Alguns problemas aditivos apresentados por Vergnaud foram utilizados por Duval (1995) para ilustrar a congruência e a não-congruência entre dois sistemas semióticos de representação; um na língua materna e a sua conversão para um outro que utiliza a escrita da equação aritmética.

Problema 1: Ganho 3 bombons e ganho 6. Fico com 9 bombons.
(ganha) 3 + (ganha) 6 = (ganha) 9

Nesse caso há correspondência semântica (ganhar $\longrightarrow$ +) mesma ordem.

Já no caso do problema: ganha 3 bombons e perde 6 bombons. Perde 3.
(ganha) 3 + (perde) 6 = (perde) 3.

Nesse caso os verbos portadores de informação semântica são antônimos (ganhar/perder) e, portanto, não há mais identidade semântica terminal, o que vai significar que as duas representações semióticas não serão congruentes, pois uma das condições não foi verificada. Esse problema é mais difícil para o aluno quando se trata de conversão.

Ou o caso do problema “Ganhou algumas, ganhou 3, no total ficou com 8. A ordem tem que ser invertida: (ganhou) 8? (ganhou) 3 = ...

Se esse problema for resolvido por um procedimento da diferença a ordem tem que ser invertida e não há nenhuma informação semântica no enunciado em língua natural que indique a subtração exigida para o mesmo.

Se o problema for resolvido pelo procedimento do complemento a ordem também tem que ser invertida, pois a comutatividade é uma exigência: (ganhou) 3 + (ganhou) ... = (ganhou) 8.

Nos dois últimos exemplos não existe congruência entre os dois sistemas semióticos de representação e, segundo resultados de pesquisas, as taxas de sucesso ou insucesso dependem do maior ou menor grau de não-congruência.

Em relação ao fenômeno da congruência ou não-congruência, Duval (1995) levanta que dois sistemas semióticos podem ser congruentes num sentido e não o ser no sentido inverso.

Duval (1995) ressalta sobre a necessidade de um trabalho: de aprendizagem específica centrado na diversidade de sistemas de representação, na sua utilização e nas traduções mútuas de um no outro; na análise do desenvolvimento dos conhecimentos e dos obstáculos encontrados nas aprendizagens fundamentais relativas ao raciocínio.

Este trabalho é importante em virtude de três fenômenos:

a) da diversidade de registros de representação semiótica que pertencem a sistemas de representação muito distintos entre si e como consequência, possuem questões específicas de aprendizagem;
b) da diferenciação entre representante e representado e também da diferenciação entre forma e conteúdo de uma representação semiótica;
c) da coordenação entre os diferentes registros de representação semióticas disponíveis.

Duval (1995) alerta que, essas três atividades cognitivas são ligadas a *semióse*[3], somente as duas primeiras (a de formação e a de tratamento) são levadas em conta no ensino no qual se observa a passagem de um sistema de representação a outro ou a mobilização simultânea de muitos registros de representação, como se isto fosse evidente para a maior parte dos alunos. O que se verifica, porém, é que estes não reconhecem o mesmo objeto através de diferentes sistemas semióticos de representação: escrita algébrica de uma relação e sua representação gráfica, escrita numérica de uma relação e sua representação geométrica sobre uma reta, um plano, etc. Uma outra questão apontada pelo autor é que, geralmente, as atividades de tratamento e de conversão das representações não são distinguidas.

Em consequência não se pode admitir que o conteúdo esteja desvinculado da forma que o representa, ou seja, a *noésis*[4] dependente da *semiósis.*

REFERÊNCIAS

DAMM, R. F. Registros de Representação. In: *Educação matemática: uma (nova) introdução,* pp. 167-188. São Paulo: Educ, 2008.

DUVAL, Raymond (1995) *Semiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques Et Apprentissages Intellectuels*. Berna: Peter Lang.

_______ Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: *Aprendizagem em Matemática*. Machado, S. D. A. (org.). pp. 11-33. Campinas, SP: Papirus, 2003.

[3] Segundo Duval (1993), "semióse" significa a produção e a apreensão de uma representação.

[4] Segundo Duval (1993), "noésis" significa apreensão conceitual do objeto.

TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

PRINCÍPIOS DA PSICOLOGIA COGNITIVA PARA COMPREENSÃO DAS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

A Teoria dos Campos Conceituais visa possibilitar uma estrutura consistente às pesquisas sobre atividades cognitivas, em especial, com referência à aprendizagem da matemática, permitindo situar e estudar as filiações e as rupturas entre conhecimentos, na perspectiva de seu conteúdo conceitual, isto é, estudar as teias de relação existentes entre os conceitos matemáticos, no sentido proposto por Kieren (1988). Esta teoria possibilita duas análises importantes: a primeira refere-se à relação existente entre os conceitos como conhecimentos explícitos e os invariantes operatórios implícitos nos comportamentos dos sujeitos frente a uma determinada situação, e a segunda sustenta um aprofundamento das relações existentes entre o significado e o significante.

Nessa perspectiva, significado é definido por Vergnaud (1993), como sendo uma relação do sujeito com as situações e os significantes, de modo mais preciso os esquemas evocados no sujeito individual. Assim, a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud (1990):

> [...] é uma teoria cognitivista que visa favorecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, notadamente das que revelam das ciências e das técnicas. (p.133)

Considera, ainda, que existe uma série de fatores que influenciam a formação e o desenvolvimento dos conceitos e que o conhecimento conceitual deve emergir dentro de situações-problema para que percebamos quais os conhecimentos que o sujeito traz consigo frente a um dado objeto matemático; é necessário buscar o entendimento do que o indivíduo realiza e de como realiza, relacionando estes dois aspectos.

Assim, o estudo do desenvolvimento de um campo conceitual requer que um conceito seja visto como uma composição de uma terna de conjuntos, representada segundo Vergnaud por S, I, R:

- *S – é um conjunto de situações que torna o conceito significativo, isto é, a realidade;*

- *I – é um conjunto de invariantes (objetos, propriedades, relações);*
- *R – é um conjunto de representações simbólicas que podem ser usadas para pontuar e representar os invariantes.*

Face ao exposto, os conceitos, de uma maneira geral e, especialmente os matemáticos, traçam seus sentidos com base em uma variedade de situações e, normalmente, cada situação não pode ser analisada com a ajuda de apenas um conceito. Isto porque uma situação, por mais simples que seja, envolve mais que um conceito e, por outro lado, um conceito não pode ser apropriado a partir da vivência de uma única situação.

Daí a importância de tratá-lo dentro de um campo conceitual, que não é único, pois existem distintos campos conceituais e que não são independentes entre si, entre os quais se destacam os campos conceituais das estruturas aditivas e das estruturas multiplicativas e neste último que este projeto de pesquisa está inserido.

3.2 ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

Para uma melhor compreensão das estruturas multiplicativas apresentadas por Vergnaud será utilizado o esquema de Nehring (2001), a qual descreve as categorias concernentes aos problemas multiplicativos que as divide em três grupos, a saber: isomorfismo de medida, produto de medida e proporções múltiplas.

AS CATEGORIAS DAS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

a) Isomorfismo de medidas: É a relação quaternária entre quatro quantidades, sendo duas de um tipo e as outras duas de outro tipo ou uma simples proporção direta entre duas grandezas, como por exemplo: pessoas e objetos, bens e custos, tempo e distância etc. Este se divide em três tipos, de acordo com as operações solicitadas:

Multiplicação: Consistem em situações problemas onde se procura o produto.

Lei binária de composição (*a* x *b*), neste caso é preciso conceber *a* e *b* como números e não como grandezas.

Segundo Vergnaud, muitas relações ternárias são tratadas como uma relação entre dois elementos que se compõem para formar um terceiro elemento, o que os matemáticos denominam de “Lei de composição binária” ou uma “operação binária”:

a adição, subtração, multiplicação, divisão de dois números, a interseção, união de conjuntos, são leis da composição binária:

- Sete é maior que três ➔ 7 = 4+3
- Seis multiplicado por cinco➔ 6x5=30
- Seis multiplicado por cinco➔ 6x5=30
- Os habitantes da França (H) que não são franceses (F) são estrangeiros (E) residentes na França: $H \cap F' = E$

Operação Unívoca: esta pode ser realizada de dois modos distintos:

Usando um operador escalar (*b* não possui dimensão), uma razão de duas grandezas da mesma espécie.

Aqui estamos operando dentro de uma mesma magnitude, denominada também de relação vertical.

Usando um operador de função (*a* representa o quociente da função linear), sua dimensão é o quociente de duas outras dimensões.

Divisão: esta subclasse apresenta duas categorias:

Determinar o valor unitário: Ex. Maria ganhou de sua avó 12 bombons. Ela quer repartir com João e Mariana. Quantos bombons cada um deverá receber? (Divisão de primeiro tipo = partição)

Encontrar x conhecendo f(x) e f(1): ex.: Vicente possui R$16,00 para comprar picolés. Sabendo-se que cada picolé custa R$ 0,80, quantos picolés ele poderá comprar? (Divisão de segundo tipo = quotição)

Proporção simples. Problemas de regra de três permitem procedimentos distintos para sua solução, mas todos envolvem três ou mais variáveis.

b) Produto de medida: Consiste na composição cartesiana de duas grandezas para encontrar uma terceira. Desta categoria participam os conceitos relativos à área, volume, superfície, produto cartesiano, além de outros conceitos físicos. Esta categoria se subdivide em:

Multiplicação: Dado o valor da grandeza elementar, determinar o valor do produto de medida. Na categoria Isomorfismo de medida, Vergnaud (1990) argumenta a dificuldade da criança em compreender porque ao multiplicar o preço de um objeto pela quantidade destes (reais por carrinho) o resultado é dado em reais e não em carrinhos. Isto se distingue da categoria Produto de Medidas, em que se multiplica, por exemplo, centímetros por centímetros resultando centímetros quadrados ou ainda meninos dançarinos x meninas dançarinas produzem-se pares de dançarinos. Ou seja, para esta categoria é dado o valor de duas grandezas elementares para que seja encontrado o valor de outra grandeza que se constitui uma relação.

Divisão: Dado o valor do produto de grandezas e o valor de uma grandeza elementar, determinar o valor de outra grandeza.

A dimensão da quantidade encontrada, diferentemente do isomorfismo, embora possa ser concebida como um duplo isomorfismo, consiste no qüociente da dimensão do produto pela dimensão de outra grandeza elementar.

Volume (m^3) ÷ área (m^2) = comprimento (m).

No entanto no isomorfismo pode ser considerado como produto:

tempo x velocidade = distância.

volume x densidade = massa ➔ onde densidade=volume/massa.

Produto cartesiano: A estrutura aritmética do produto cartesiano como produto de medida constitui-se em grande dificuldade e pode ser concebido como proporção dupla, apesar de inicialmente constituir-se em uma proporção simples.

c) Proporções múltiplas: Nesta categoria, as grandezas envolvidas possuem seus significados próprios e não podem ser reduzidas ao produto de outras grandezas. Existem duas subclasses:

Multiplicação. Todos os procedimentos são multiplicativos.

Divisão, dois modelos são apresentados:

Determinar o valor unitário f(1,1).

Determinar x conhecendo f(x, a) = b e f(1,1).

Estas categorizações propostas por Vergnaud (1991) permearão todas as etapas do nosso estudo, no que diz respeito à análise das situações que compõem o campo conceitual das estruturas multiplicativas, bem como todas as fases de elaboração do processo de formação.

REFERÊNCIAS

CANÔA, Swain Silvia. **O campo conceitual multiplicativo na perspectiva do professor das séries iniciais**. 1997. Dissertação (Mestrado no Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

GOMES, M. G. **Obstáculos na aprendizagem matemática:** identificação e busca de superação nos cursos de formação de professores das séries iniciais. 2001. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001.

M KIEREN, T. E. Multiple views of multiplicative structures. In: HAREL, G.; CONFREY, J. (eds.): **The development of multiplicative reasoning in the learning of Mathematics**. New York: State University of New York Press, 1994. p. 389-400.

NEHRING, C. MARIA. **Compreensão de texto:** enunciados de problemas multiplicativos elementares de combinatória, 2001. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.) **Acquisition of Mathemtics concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983. p. 127-174.

_______. Multiplicative structures. In: HIEBERT, H.; BEHR, M. (Eds.). **Research agenda in Mathematics Education**: number concepts and operations in the Middle Grades. New Jersey: Lawrence Erlbaum, 1988. p. 141-161.

_______. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 10, n. 23, 133-170, 1990.

_______. **Teoria dos campos conceituais**. In: NASSER, L. (Ed.). 1º Seminário Internacional de Educação Matemática. **Anais...** Rio de Janeiro: Seminário Internacional de Educação Matemática, 1993. p. 1-26.

A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Saddo Ag Almouloud – PUC-SP

saddoag@pucsp.br

(em prelo livro: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. FUNDAMENTOS DA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA, Editora da Universidade Federal de Paraná)

Neste capítulo estudaremos a Teoria Antropológica do Didático, desenvolvida por Chevallard (1992), focando mais especificamente suas noções fundamentais e como pode ser um instrumento poderoso para análise, por exemplo, de práticas docentes. Discutiremos o modelo proposto, as noções de organizações praxeológicas (organizações matemática e didática), de objeto ostensivo e não-ostensivo, entre outros.

Esta teoria é uma contribuição importante para a Didática da Matemática, pois além de ser uma evolução do conceito de transposição didática, inserindo a didática no campo da antropologia focaliza o estudo das organizações praxeológicas didáticas pensadas para o ensino e aprendizagem de organizações matemáticas. A Teoria Antropológica do Didático (TAD) estuda as condições de possibilidade e funcionamento de Sistemas Didáticos, entendidos como relações sujeito-instituição-saber (em referência ao sistema didático tratado por Brousseau, aluno-professor-saber).

Segundo Ferreira (1986), Novo Dicionário da Língua Portuguesa, o termo Antropologia designa a *"ciência que reúne várias disciplinas cujas finalidades comuns são descrever o homem e analisá-lo com base nas características biológicas (antropologia física) e culturais (antropologia social) dos grupos em que se distribui, dando ênfase, através das épocas, às diferenças e variações entre estes grupos."* A Teoria Antropologia do Didático, segundo Chevallard, estuda o homem frente ao saber matemático, e mais especificamente, frente a situações matemáticas. Uma razão para a utilização do termo "antropológico" é que a TAD situa a atividade matemática e, em conseqüência, o estudo da matemática dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais (Chevallard, p.1, 1999-1).

Sabemos que a teoria das situações didáticas (TSD), já estudada no capítulo XX, foi desenvolvida no intuito de modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos e provocou, no campo da Educação Matemática, pelo menos três rupturas de natureza epistemológica:

- a primeira, quando considera a *matemática como a essência dos fenômenos didáticos*.
- O desejo de elaborar uma ciência da educação desses fenômenos constitui a *segunda ruptura* e levou a explicitar os modelos teóricos utilizados e submetê-los a um esquema experimental para verificar sua viabilidade e confiabilidade.
- Em relação à visão clássica a respeito do saber matemático, a teoria das situações traz a terceira ruptura epistemológica fundamental e supõe que os *conhecimentos matemáticos só podem ser compreendidos e apreendidos por meio de atividades e problemas que podem ser resolvidas pela mobilização desses conhecimentos.* A Matemática é, antes de tudo, uma *atividade que se desenvolve em situação que pode ser modelada por um jogo cujo oponente é um meio antagônico.* Trata-se de uma atividade *estruturada,* na qual se destacam diferentes fases: ação, formulação e validação que possuem o aluno como ator principal, e as fases de devolução e institucionalização que acontecem sob responsabilidade do professor.

Levando em consideração o modelo proposto pela TAD, pode-se interpretar a *transposição didática*, como uma noção que desenvolve, segundo Chevallard (1999-1) a a tripla ruptura epistemológica provocada pela teoria das situações, pois, a noção de transposição didática mostra que o *saber matemático (saber científico, ensinado ou a ensinar) está no centro de toda problematização didática.* Em conseqüência, esse saber jamais pode ser considerado como algo inquestionável.

Modelagem antropológica da matemática

Nas suas primeiras teorizações, Chevallard desenvolveu a noção de transposição didática para distinguir os diferentes saberes envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. Segundo Johsua e Dupin (1993), esse autor apontava a necessidade da existência de uma matemática do professor, qualitativamente distinta daquela do matemático e daquela do aluno. Uma classe de objetos a ensinar é a conseqüência de uma história particular, o resultado de um tratamento didático que obedece a regras precisas. Estes mecanismos gerais que permitem a passagem de um objeto de saber a um objeto de ensino são agrupados sob o nome de transposição didática (Chevallard, 1991).

A teoria da transposição didática tem o propósito de fazer uma análise epistemológica do saber sob o ponto de vista didático essencialmente em termos de *objetos de saber.* Tais objetos podem ser categorizados em:

- paramatemáticos: ferramentas utilizadas para descrever e estudar outros objetos matemáticos;
- matemáticos: além de instrumentos úteis para estudar outros objetos matemáticos se tornam objetos de estudo em si mesmo.
- protomatemáticos: possuem propriedades utilizadas para resolver alguns problemas, sem contudo adquirir o status de objeto de estudo, ou de ferramenta para o estudo de outros objetos.

A insuficiência desta classificação foi uma das razões que levaram Chevallard a desenvolver a Teoria Antropológica do Didático. Nesta, a antropologia dos saberes é como "a antropologia Didática da Matemática" é um sub-campo da "antropologia da matemática", estudo do homem frente a situações matemáticas. A *problemática ecológica* amplia o campo de análise e permite abordar os problemas que se criam entre os diferentes objetos do saber a ensinar. Nesta visão, os objetos possuem *inter-relações* hierárquicas que permitem identificar e analisar as "*estruturas ecológicas dos objetos".* O autor vai assim buscar apoio na idéia de nicho, habitat, cadeia alimentar, ecossistema, para tentar explicar as relações entre os objetos e no estudo do objeto em si mesmo.

A Didática da Matemática vista no campo da antropologia do conhecimento (ou antropologia cognitiva) considera que *tudo é objeto* identificando diferentes tipos de objetos particulares: *as instituições, os indivíduos e as posições* que os indivíduos ocupam nas instituições, tomando os indivíduos como *sujeitos* das instituições.

O *conhecimento* - e o *saber,* considerado como uma certa *forma de organização de conhecimentos*- entende que um objeto existe se um sujeito ou uma instituição o reconhece, se há um conhecimento e ~~o~~ um saber reconhecido como forma de organização desse conhecimento. Em outras palavras, a existência de um objeto depende do reconhecimento e do relacionamento de pelo menos uma pessoa ou instituição com esse objeto.

Para Chevallard, o saber matemático organiza uma forma particular de conhecimento, produto da ação humana em uma instituição caracterizada por qualquer coisa que se produza, se utiliza e se ensina, além de poder eventualmente transpor as instituições. Assim, o autor introduz a noção de habitat de um objeto matemático como sendo o tipo de instituição onde se encontra o saber relacionado ao objeto de estudo, que por sua vez determinará a função desse saber, ou seja, determinará seu nicho. Lembremos que em ecologia, o termo habitat designa o lugar onde vive uma espécie, enquanto que nicho ecológico é o papel que o organismo desempenha no ecossistema. O conhecimento de nicho ecológico permite responder às seguintes questões: como, onde e à custa de quem a espécie se alimenta, por quem é comida, como e onde descansa e se reproduz. O termo "Ecologia" foi criado por Haeckel (1834-1919) em 1869, em seu libro "Generelle Morphologie des Organismen", para designar "o estudo das relações de um organismo com seu ambiente inorgânico ou orgânico, em particular o estudo das relações do tipo positivo ou amistoso e do tipo negativo (inimigos) com as plantas e animais com que aparece pela primeira vez em Pontes de Miranda, 1924, "Introdução à Política Científica". O conceito original evoluiu até o presente no sentido de designar uma ciência, parte da Biologia, e uma área específica do conhecimento humano que tratam do estudo das relações dos organismos uns com os outros e com todos os demais fatores naturais e sociais que compreendem seu ambiente. (http://ivairr.sites.uol.com.br/ecologia.html, em 02 de dezembro de 2005).

Na TAD, as noções de (tipo de) *tarefa*, (tipo de) *técnica, tecnologia e teoria* permitem modelar as práticas sociais em geral e, em particular, a atividade matemática, baseando-se em três postulados:

1. *Toda prática institucional pode ser analisada, sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas*.
2. *O cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica*

A palavra técnica é aqui utilizada como uma "maneira de fazer" uma tarefa, mas não é necessariamente como um procedimento estruturado e metódico ou algorítimico.

A relação institucional que se estabelece entre uma instituição I (aluno, professor, ...) e um objeto O depende das posições que ocupam nessa instituição e do conjunto de tarefas que essas pessoas devem cumprir usando determinadas técnicas. Segundo Chevallard (1992, p.127),

> Um objeto existe a partir do momento em que uma pessoa X ou uma instituição I o reconhece como *existente* (para ela). Mais precisamente, podemos dizer que o objeto O existe para X (respectivamente para I) se existir um objeto, que denotarei por R(X, O) (respectivamente R_I (O)), a que chamarei *relação pessoal de X com O* (respectivamente *relação institucional de I com O*).

O problema de delimitar tarefas em uma prática institucional varia de acordo com o ponto de vista da instituição onde se desenvolve a prática ou de uma instituição externa que observa a atividade para descrevê-la com um objetivo preciso.

As tarefas são identificadas por um verbo de ação, que sozinho caracterizaria um gênero de tarefa, por exemplo: *calcular, decompor, resolver, somar* que não definem o conteúdo em estudo. Por outro lado, *"resolver uma equação fracionária"* ou ainda *"decompor uma fração racional em elementos simples"* caracterizam tipos de tarefas, em que se encontram determinadas tarefas, como por exemplo *"resolver a equação* $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5$*"* ou *"decompor a fração 7/9 em frações mais simples"* (Silva, 2005)

Para Chevallard, a necessidade de reconstrução de tarefas, enquanto construções institucionais, caracteriza um problema a ser resolvido dentro da própria instituição, que no caso da sala de aula, por exemplo, é uma questão didática.

Para uma determinada tarefa, geralmente, existe uma técnica ou um número limitado de técnicas reconhecidas na instituição que problematizou essa tarefa, embora possam existir técnicas alternativas em outras instituições. A maioria das tarefas institucionais torna-se rotineira quando deixam de apresentar problemas em sua realização. Isso quer dizer que para produzir técnicas é necessário que se tenha uma tarefa efetivamente problemática que estimula o desenvolvimento de pelo menos uma técnica para responder às questões colocadas pela tarefa. As técnicas assim produzidas são então organizadas para que funcionem regularmente na instituição.

Com esses dois postulados citados, se obtém um bloco *"prático-técnico"* formado por um tipo de tarefas e por uma técnica que pode ser identificado em linguagem corrente como um *"saber-fazer"*. (Chevallard, 2002, p. 3)

O terceiro postulado a ser enunciado refere-se à ecologia das tarefas:

3. A *ecologia das tarefas, quer dizer, as condições e restrições que permitem sua produção e sua utilização nas instituições.*

> [...] a ecologia das tarefas e técnicas são as condições e necessidades que permitem a produção e utilização destas nas instituições e supõe-se que, para poder existir em uma instituição, uma técnica deve ser compreensível, legível e justificada [...] essa necessidade ecológica implica na existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas que chamamos de tecnologia da técnica. O postulado anunciado implica também que toda tecnologia tem necessidade de uma justificativa que chamamos teoria da técnica e que constitui o fundamento último. (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 85-86).

Supõe-se que, para existir em uma instituição, uma técnica deve ser pelo menos compreensível, legível e justificada, o que seria uma condição mínima para permitir o seu controle e garantir a eficácia das tarefas feitas, que são geralmente tarefas supondo a colaboração de vários atores. Essas condições e restrições ecológicas implicam então a existência de um **discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas** que Bosch e Chevallard (1991) chamam de ***tecnologia*** da técnica. Toda tecnologia precisa também de uma justificação, que chamaram **a *teoria*** da técnica.

Para Chevallard (2002) um *"saber-fazer",* identificado por uma tarefa e uma técnica, não é uma entidade isolada porque toda técnica exige, em princípio, uma justificativa, isto é, um "discurso lógico" (logos) que lhe dá suporte, chamado de tecnologia. Segundo o autor, a tecnologia vem descrever e justificar a técnica como uma maneira de cumprir corretamente uma tarefa.

Assim, qualquer bloco tarefa/técnica vem sempre acompanhado de ~~pelo menos~~ algum vestígio de tecnologia. Por exemplo, na aritmética elementar, às vezes, o discurso tem a função dupla de ser técnica e tecnologia, pois permite, ao mesmo tempo, encontrar o resultado e justificar que tal resultado está correto. Chevallard (1999, p.) cita o seguinte exemplo de discurso que tem essa dupla função: *Se 8 chupetas custam 10 euros, 24 chupetas, ou seja 3 vezes mais chupetas custarão 3 vezes mais, ou seja 3 vezes 10 euros."*

Pode ocorrer também de a tecnologia modificar a técnica para que seja mais abrangente ou ainda produzir uma nova técnica mais sofisticada. No caso das chupetas, por exemplo, a tecnologia que introduz e justifica o uso das frações permitiria produzir uma técnica mais complexa: *Se a chupetas custam b euros, então x chupetas custam* $x \cdot \frac{b}{a}$ *ou seja* $\frac{x}{a} \cdot b$.

Um conjunto de técnicas, de tecnologias e de teorias organizadas para um tipo de tarefa forma uma *organização "**praxeológica**"* (ou *praxeologia*) *pontual.* A palavra praxeologia é formada por dois termos gregos, *práxis e logos,* que significam, respectivamente, prática e razão. Ela reporta-se ao fato de que uma prática humana, no interior de uma instituição, está sempre acompanhada de um discurso, mais ou menos desenvolvido, de um *logos* que a justifica, a acompanha e que lhe dá razão.

Se considerarmos, por exemplo, o ensino da matemática no Ensino Médio, pode-se falar:

- de uma organização praxeológica *pontual* no que diz respeito à resolução de um certo tipo de problema de proporcionalidade - organização que responderia à seguinte questão "como resolver um problema desse tipo?"

- de uma organização *local* no que diz respeito à resolução de diferentes tipos de problemas de proporcionalidade;
- de uma organização *regional*, no que diz respeito, por exemplo, à noção de função numérica (que corresponde a todo um setor da Matemática ensinada no Ensino Médio).

Um *saber* diz respeito a uma *organização praxeológica* particular, com uma certa "generalidade" que lhe permite funcionar como uma máquina de produção de conhecimento. Para Bosch, Fonseca e Gascón (2004, apud Silva, 2005, p.99), a reconstrução institucional de uma teoria matemática requer elaborar uma linguagem comum que permita descrever, interpretar, relacionar, justificar e produzir as diferentes tecnologias da *Organização Matemática Local* (OML) que integram uma *Organização Matemática Regional* (OMR).

Para os autores citados, ainda que os processos de construção (ou reconstrução escolar) de OML podem ser muito diferentes, a análise conjunta da dinâmica de seu processo de estudo e de sua estrutura permitem determinar o grau de completitude da mesma, que dependerá do cumprimento das seguintes condições:

- *uma OML deve responder a questões que não podem ser respondidas por nenhuma Organização Matemática Pontual (OMP), que constitui sua razão de ser.*

Segundo Silva (2005, p.99)

> Por exemplo, o tipo de tarefa: *identificar o fracionário que corresponde a uma figura apresentada* constitui uma OMP. Quando várias OMP agrupam-se pelo fato de ter uma tecnologia que justifica as técnicas mobilizadas para resolver suas tarefas, diremos que temos uma OML.
>
> Assim, para que se construa uma OML justificada pela concepção parte-todo seria necessário considerar nas tarefas, do tipo citado acima, figuras que representem grandezas discretas ou contínuas que permitam abordar técnicas diferentes, além de outros tipos de tarefas que tenham suas técnicas justificadas pela concepção parte-todo para fracionários.

- *O processo de reconstrução deve ter momentos exploratórios que permitam comparar variações das técnicas que aparecem ao abordar as diferentes tarefas.*

Ainda segundo Silva (2005), durante a reconstrução, o tratamento das diversas figuras permitirá questões a respeito da técnica que propicia, por exemplo, a percepção da limitação da dupla contagem das partes e o desenvolvimento de outras técnicas.

- *A exploração de uma OML deve incidir em um verdadeiro trabalho da técnica, provocando seu desenvolvimento progressivo.*
- *Na reconstrução de uma OML, devem aparecer novas questões matemáticas relativas às diferentes técnicas que irão surgindo (questionamento tecnológico).*

> Considerando o tipo de tarefa *"identificar o fracionário que corresponde a uma figura apresentada"*, a apresentação de figuras de superfícies totalmente divididas em partes congruentes permite a compreensão da técnica da dupla contagem das partes; no entanto, há necessidade de fugir desse modelo de figura para que se perceba a limitação dessa técnica e a construção de outras técnicas possíveis. O trabalho com figuras de diversos tipos permitirá o desenvolvimento progressivo da técnica que, por sua vez, provoca questionamentos tecnológicos. (Silva, 2005, p.99).

- *No processo de reconstrução de uma OML, é necessário institucionalizar os componentes explícitos da organização, não isolados, mas, no conjunto da organização.*

Segundo a autora, a institucionalização da OML que se justifica pela concepção parte-todo deve explicitar a importância das figuras na construção de técnicas diferentes e, conseqüentemente, do discurso tecnológico-teórico (p. 99).

- *É preciso avaliar a qualidade dos componentes da OML construída. Esta avaliação mostrará a necessidade de articulá-la com outras OML para constituir uma OMR.*

Bosch, Fonseca e Gascón (2004, apud Silva, 2005, p.99)

> concluem que o cumprimento de tais condições caracterizará uma OML relativamente completa e apresentam sete indicadores do grau de completitude de uma OML: 1) integração dos tipos de tarefas, 2) diferentes técnicas e critérios para escolher, 3) independência dos *ostensivos* que integram as técnicas, 4) existência de tarefas e técnicas reversíveis, 5) interpretação do resultado de aplicar as técnicas, 6) existência de tarefas matemáticas abertas, 7) incidência dos elementos tecnológicos sobre a prática. Esta construção progressiva dos tipos de tarefa que se estudam, é também uma condição necessária para poder colocar e abordar em uma OML questões problemáticas cada vez mais abertas.

Objetos ostensivos e Objetos não-ostensivos

O problema da "natureza" dos objetos matemáticos e o de seu funcionamento na atividade matemática, conduziram Chevallard e Bosch (1999, p.) a estabelecer uma dicotomia fundamental que os distingue em dois tipos *ostensivos* e *não-ostensivos*.

Esses autores falam de *objetos ostensivos*, (em latim: ostendere, "mostrar, apresentar com insistência"), para se referir a todo objeto que tendo uma natureza sensível e uma certa materialidade tem, para o sujeito, uma realidade perceptível. Pode-se dizer dessa forma que os ostensivos são os objetos manipuláveis na realização da atividade matemática.

Dessa forma, os objetos *não-ostensivos* são, segundo os autores, todos os "objetos" que, como as idéias, as instituições ou os conceitos, existem institucionalmente sem que, no entanto, eles sejam vistos, ditos, escutados, percebidos ou mostrados por conta própria. Assim, esses objetos só podem ser evocados ou invocados pela manipulação adequada de certos objetos ostensivos que lhes são associados, tais como uma palavra, uma frase, um gráfico, uma escrita, um gesto, ou todo um discurso.

> Por exemplo, a notação P(A) e as palavras: probabilidade de um evento A, são objetos ostensivos; já a noção de probabilidade é um objeto não-ostensivo. Sendo A e B eventos mutuamente exclusivos de um mesmo espaço amostral e C um evento, não nulo, desse espaço, tem-se:
>
> $$P[(A\cup B)\mid C]=\frac{P[(A\cup B)\cap C]}{P(C)}=\frac{P[(A\cap C)\cup(B\cap C)]}{P(C)}=\frac{P(A\cap C)+P(B\cap C)}{P(C)}=$$
> $$=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}+\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=P(A\mid C)+P(B\mid C)$$
>
> Pode-se considerar que os objetos ostensivos que aparecem, após a primeira igualdade, foram guiados pelo objeto não-ostensivo, definição de probabilidade condicional; após a segunda, pela propriedade distributiva da intersecção de conjuntos em relação à união; após a terceira, pelo axioma da probabilidade da união de dois eventos exclusivos; após a quarta, pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de números reais; e, após a quinta, novamente pela definição de probabilidade condicional. (Miguel, 2005, p.350).

Nesse sentido, Bosch e Chevellard (1999) usam o termo genérico "*manipulação*" para designar os diversos usos possíveis dos objetos ostensivos pelo sujeito e para diferenciá-los dos ~~"objetos~~ "não-ostensivos visto que os primeiros podem ser manipulados. A notação $\vec{v}$ e a palavra "vetor", por exemplo, são objetos ostensivos, enquanto que a noção de vetor é um objeto não-ostensivo, pois é impossível manipulá-lo (no sentido acima). Pode-se torná-lo presente - apresentá-lo - pela manipulação de certos objetos ostensivos que lhes são associados como a notação $\vec{v}$, por exemplo.

Em qualquer atividade humana, mais especificamente, em toda atividade matemática, ~~há~~ existe a co-ativação de objetos ostensivos e de objetos não-ostensivos. Na abordagem antropológica, podemos dizer que o cumprimento de toda tarefa envolve necessariamente a *manipulação de ostensivos regulados pelos não-ostensivos* fazendo com que os objetos ostensivos ~~constituem~~ tornem-se a parte perceptível da atividade.

Considerar que a percepção dos ostensivos seja um fato natural, na maioria dos casos explica o que a teoria das situações evidenciou sob o nome de *estratégias didáticas de ostensão* (Brousseau, 1986). Muitas vezes o professor adota uma estratégia de ensino na qual ele se limita a mostrar aos alunos um objeto ostensivo, acreditando que estes alunos têm condições de perceber espontaneamente uma relação entre esse ostensivo e o objeto não-ostensivo (noções, conceitos, propriedades, etc.) associado.

Na análise da atividade matemática, a dialética ostensivo/não-ostensivo é, geralmente, concebida em termos de signos e de significação: os objetos ostensivos são *signos* de objetos não-ostensivos que constituem o *sentido* ou a *significação*. A função semiótica dos ostensivos, sua capacidade de produzir um *sentido* ou signficado, não pode ser separada de sua função instrumental, de sua capacidade de ~~a~~ integrar-se nas manipulações técnicas, tecnológicas e teóricas. Queremos dizer que os ostensivos são ferramentas materiais para a ação nas organizações matemáticas. As duas funções, semiótica e instrumental, co-habitam.

Vários objetos ostensivos aparecem na realização de uma atividade matemática, sem que possam ser ativados individualmente porque suas funções são distintas e dependem da técnica adotada e dos registros utilizados.

> O valor instrumental de um objeto ostensivo depende da situação; por exemplo, E(X), $\overline{X}$, μ_X representam a média, embora E(X) seja usado no caso de se tratar de média de variável aleatória, $\overline{X}$ no caso de média amostral e μ_X para o caso de média populacional. O objeto ostensivo E(X) tem valor instrumental superior quando se pretende trabalhar com as propriedades da média, pois este ostensivo permite colocar em ação técnicas relacionadas às funções lineares, como E(X+Y)=E(X)+E(Y) ou E(k.X)=k.E(X), que não são usuais com os outros ostensivos. (Miguel, 2005, p.35)

A citação abaixo expressa bem o que define Chevallard sobre o valor semiótico de um ostensivo:

> O valor semiótico (ou semioticidade) de um objeto ostensivo está em estreita relação com seu valor instrumental; ele tem seus valores instrumental e semiótico estabilizados localmente na história da instituição e podem evoluir de acordo com seu engajamento nas atividades institucionais. Essa evolução não é universal e uniforme, pois depende da instituição e das condições ecológicas. (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, apud Miguel, 2005, p.35).

Segundo Chevallard e Bosch (1999), a noção de registro ostensivo, bem como a importância da articulação dos registros mobilizados no desenvolvimento de uma praxeologia matemática devem ser relacionadas à noção de *registro de representação semiótica* proposta por Duval (1995) em sua abordagem cognitiva da aprendizagem da Matemática e do princípio segundo o qual a mobilização de uma pluralidade de registros tem um papel fundamental em Matemática. No entanto, os autores alertam para a diferença essencial entre a noção de registros de representação semiótica e a noção de objeto ostensivo.

A abordagem cognitiva de Duval considera como objeto de estudo o "funcionamento cognitivo que decorre da aquisição de conhecimentos matemáticos", isto é, o funcionamento do conhecimento é visto como mecanismos e processos que permitem a construção desse conhecimento a partir da atividade de um sujeito. Segundo Chevallard e Bosch (1999), essa visão estabelece, antes de tudo, uma distinção clara entre a descrição da atividade matemática e a do funcionamento cognitivo dos sujeitos que realizam essa atividade, questionando essencialmente o estudo das operações cognitivas necessárias para o desenvolvimento de diferentes tipos de tarefas matemáticas, por exemplo, um cálculo, um raciocínio ou a utilização de uma figura numa demonstração geométrica.

Ainda segundo esses autores, no estudo do funcionamento cognitivo considera-se a tarefa como algo dado e evidente, ou seja, *como se as tarefas matemáticas em si fossem já descritas e bem decompostas* como tarefas matemáticas. As dificuldades evidenciadas no desenvolvimento de trabalhos que envolvem registros ostensivos (por exemplo, apreensão de uma figura, produção de um discurso, etc.) ou de trabalhos de coordenação entre diferentes registros (por exemplo, produção de um modelo gráfico a partir de uma igualdade entre duas grandezas) são consideradas dificuldades "cognitivas"

Chevallard e Bosch apontam que as duas teorizações se diferenciam no seguinte:

- ✓ O que é apresentado como sendo uma mudança de registros que só dependeria do funcionamento cognitivo do sujeito, é visto na teorização de Bosch e

Chevallard como sendo uma prática, cuja realização efetiva deve ser ligada à existência de uma *praxeologia matemática local,* construída em torno de um certo tipo de problema e cujos erros de execução não podem ser entendidos sem que, de antemão, se conheça os elementos dessa praxeologia que foram disponibilizados aos alunos observados.

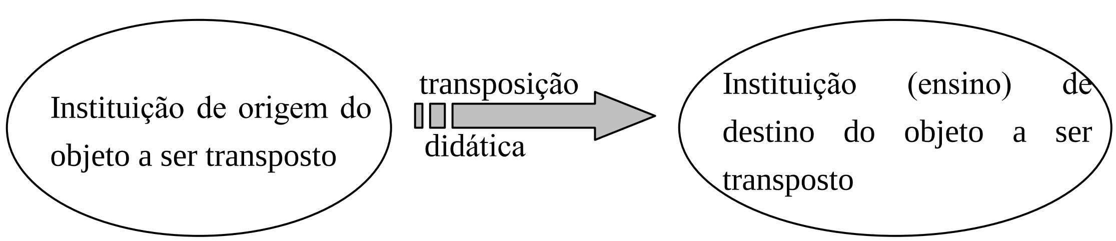
✓ Referir-se unicamente ao funcionamento cognitivo, consiste, na realidade, em uma outra forma de naturalização e de ocultação da *técnica matemática* que permitiria realizar a tarefa da praxeologia construída.

Análise de uma Organização Matemática

A praxeologia associada a um saber é a junção de dois blocos: saber-fazer (técnico/prático) e saber (tecnológico/teórico) cuja ecologia refere-se às condições de sua construção e vida nas instituições de ensino que a produz, utiliza ou transpõe. Consideram-se aqui as condições de "sobrevivência" de um saber e de um saber-fazer em analogia a um estudo ecológico: qual o habitat? Qual o nicho? Qual o papel deste saber ou saber-fazer na "cadeia alimentar"? Tais respostas ajudam na compreensão da organização matemática determinada por uma praxeologia.

Segundo Chevallard (1999-2), as praxeologias (ou organizações) associadas a um saber matemático são de duas espécies: matemáticas e didáticas. As organizações matemáticas referem-se à realidade matemática que se pode construir para ser desenvolvida ~~numa~~ em uma sala de aula e as organizações didáticas referem-se à maneira que se faz essa construção; sendo assim, existe uma relação entre os dois tipos de organização que Chevallard (2002) define como fenômeno de co-determinação entre as organizações matemática e didática.

Em um processo de formação de saberes/conhecimentos, as praxeologias envelhecem pois seus componentes teóricos e tecnológicos perdem seu crédito. Constantemente, em uma determinada instituição I surgem novas praxeologias que poderão ser produzidas ou reproduzidas se existem em alguma instituição I'. A passagem da praxeologia da instituição I para a da instituição I' é chamada por Chevallard (2002) de Transposição, mais especificamente, de Transposição Didática quando a instituição de destino é uma instituição de ensino (escola, classe, etc.).



Este mesmo autor afirma que quando se trata de um objeto relativo às práticas de ensino, deve-se em primeiro lugar, observar o objeto, depois descrevê-lo, ~~e~~ analisá-lo e avaliá-lo para, finalmente, desenvolver atividades que têm por objetivo o ensino e a aprendizagem desse objeto, categorizado da seguinte forma:

- a realidade matemática (Organização matemática – OM);
- como que se pode construir essa realidade (Organização Didática - OD)

Para que seja feita uma análise de uma OD é necessário que se conheça a teoria que sustenta o tema em estudo, visto que como toda organização praxeológica, ela se articula em tipos de tarefas (geralmente cooperativas), em técnicas, em tecnologias e em teorias. Mas como descrever tal organização? Quais são, por exemplo, os principais tipos de tarefas?

A noção de momento foi introduzida por Chevallard (1999-2) para descrever uma organização didática e remete, apenas aparentemente, à estrutura temporal do processo de estudo. O sentido dado à palavra "momento", é, de início, uma dimensão multidimensional, um fator no processo multifatorial. Os momentos didáticos são, primeiramente, uma realidade funcional do estudo, antes de ser uma realidade cronológica. Quando se pretende descrever uma organização didática em torno de um objeto matemático, qualquer que seja o caminho desse estudo, certos tipos de situações, momentos do estudo ou momentos didáticos estão necessariamente presentes. O autor define seis momentos didáticos alertando para o fato de que eles podem ocorrer simultaneamente, pois como não existe uma seqüência pré-definida para a sua ocorrência, podem se repetir no decorrer do estudo.

O primeiro momento refere-se ao encontro com a organização praxeológica por meio de tarefas; esse encontro vai orientar o desenvolvimento das relações institucionais e pessoais com o objeto. Estas relações serão construídas ao longo de todo o processo de estudo e têm papel importante na aprendizagem[1]. Este momento consiste em encontrar a OM por meio de, pelo menos, um dos tipos de tarefas que a constituem e que, no entanto, não determina completamente a relação com o objeto, porque é construída e modificada durante o processo de estudo.

[1] Para Chevallard, a aprendizagem existe quando a relação pessoal do sujeito com o objeto é modificada ou criada pela interação com o contrato institucional, ou seja, pela interação com a relação institucional R_I (O).

No segundo momento, tem-se a exploração das tarefas e o início da elaboração de uma técnica para resolver esse tipo de tarefas. É nesse momento que o professor tem o papel de orientar os alunos para que seja constituída pelo menos parcialmente, uma técnica que, a princípio, possa resolver o problema, que representa uma espécie do tipo de tarefa estudado. Essa ação deve, posteriormente, possibilitar a emergência de outra técnica mais elaborada, geral e completa. Assim, estudar problemas de certo tipo é um meio permanente de criar e aprimorar uma ou mais técnicas que se tornarão o meio para resolver de maneira quase rotineira os problemas desse tipo.

O terceiro momento diz respeito à construção do ambiente tecnológico/teórico que começa a se constituir desde o primeiro encontro tornando-se, cada vez mais preciso no decorrer do estudo. Em geral, esse momento começa por uma relação entre um ambiente tecnológico/teórico construído anteriormente e o início da criação de um novo ambiente que se tornará mais preciso com a emergência da técnica. Em geral, esse momento está em estreita inter-relação com cada um dos outros momentos, estabelecendo um processo dinâmico e atemporal na evolução do processo desencadeado pela organização matemática e que é o foco do estudo da organização didática. Assim, desde o primeiro encontro com um tipo de tarefa, tem-se inter-relações e/ou conexões com um ambiente tecnológico-teórico anteriormente elaborado. Vale a pena destacar que no ensino tradicional, esse momento constitui a primeira etapa do estudo e as tarefas aparecem como aplicação do bloco tecnológico/teórico.

No quarto momento ocorre o trabalho com a técnica em diferentes tarefas, que pode, eventualmente, ser aperfeiçoada pela sua mobilização relativa a um conjunto de tarefas qualitativamente e quantitativamente representativas da organização matemática em jogo.

No quinto momento, o da institucionalização, a organização matemática é definida. Elementos que fizeram parte do estudo em fases anteriores podem ser descartados e outros integrados definitivamente a partir da explicitação oficial desses elementos pelo professor ou pelo aluno, tornando-se parte integrante da cultura da Instituição ou da classe. Ou seja, novos elementos podem ser introduzidos modificação da relação institucional vigente ou pela criação de uma nova relação institucional com esses elementos.

O sexto momento, é considerado sob dois aspectos: a avaliação das relações pessoais e a avaliação da relação institucional, ambas em relação ao objeto construído, da técnica construída, buscando verificar sua capacidade intelectual.

O momento da avaliação é uma fase importante na TAD porque se supõe que é o aquele no qual o professor toma por objeto de estudo as soluções produzidas por seus alunos. O aluno, por sua vez, observa na realização de sua solução (em classe ou no livro) determinadas "maneiras de fazer", analisando-as e avaliando-as para "desenvolver" sua própria solução. De acordo com Chevallard (1999-2), o esquema proposto pela abordagem antropológica é universal e nele a etapa de avaliação é fundamental e não deve ser ~~pensada~~ considerada somente a partir da avaliação escolar. Pelo contrário, o ato de avaliar sempre será e necessariamente relativo, pois o valor reconhecido para um objeto não é intrínseco nem absoluto porque a atribuição de um valor se refere sempre, implicitamente ou não, a um certo uso social do objeto avaliado visto que se avalia sempre sob certo ponto de vista.

No caso de uma avaliação a priori das organizações matemática e didática, OM e OD, feita por um professor y, Chevallard (1999) define um conjunto de critérios explícitos que, ao ser analisado, permitirá ao professor e/ou pesquisador afirmar em qual medida esses critérios são satisfatórios para avaliar a organização matemática estudada. O autor apresenta os seguintes critérios para analisar tipos de tarefas:

1. Critério de identificação: verifica quais tipos de tarefas são apresentados de forma clara e bem identificadas;
2. Critério das razões de ser: verifica quais razões de ser dos tipos de tarefas são explicitadas ou ao contrário, se esses tipos de tarefas aparecem sem motivos válidos;
3. Critério de pertinência: verifica quais tipos de tarefas considerados são representativos das situações matemáticas freqüentemente encontradas bem como se são pertinentes tendo em vista as necessidades matemáticas dos alunos.

A avaliação de técnicas apóia-se nos mesmos critérios, devendo-se buscar respostas para as seguintes indagações:

1. As técnicas propostas são efetivamente elaboradas ou somente esboçadas?
2. São de fácil utilização?
3. São imprescindíveis para o cumprimento do tipo de tarefas proposto?
4. São fidedignas e confiáveis, tendo em vista as condições de sua utilização no cumprimento do tipo de tarefas proposto?

Para avaliar as tecnologias ou a pertinência do bloco tecnológico-teórico utilizado nas justificativas das técnicas empregadas na resolução de um tipo de tarefas podemos partir de um conjunto de indagações tais como:

1. Dado um enunciado, o problema de sua justificativa está somente colocado ou é considerado tacitamente como pertinente, evidente, natural ou ainda bem conhecido?
2. As formas de justificativas utilizadas são próximas daquelas matematicamente válidas?
3. Essas justificativas são adequadas tendo em vista o problema colocado?
4. Os argumentos utilizados são cientificamente válidos?
5. O resultado tecnológico de uma determinada atividade pode ser explorado para produzir novas técnicas para resolver novas tarefas?

De acordo com Chevallard (1999-2) o modelo dos momentos de estudo evidencia a importância que professor deve dar para a elaboração de uma organização didática que tem por objetivo o ensino e a aprendizagem de uma organização matemática. Ou seja, uma organização didática cujo objetivo é fazer existir uma relação pessoal com a organização matemática ou modificar a relação já existente com essa organização, por exemplo, pelo acréscimo de novas técnicas relacionadas ao tipo de tarefa estudado, ou pela ampliação do discurso teórico-tecnológico. Seu trabalho é complexo porque além de colocar em ação a organização didática, ele é seu ator e, muitas vezes, ~~ele é~~ o ~~seu~~ próprio criador~~.~~

O autor acrescenta ainda que o modelo dos momentos ~~do~~ de estudo prevê dois grandes tipos de emprego para o professor como instrumento de análise dos processos didáticos e permitir colocar claramente o problema da realização dos diferentes momentos do estudo. Por exemplo, como realizar concretamente o primeiro encontro com a organização matemática envolvida? Com que tipo de tarefas? Como conduzir o estudo exploratório de um tipo de tarefas? Como organizar bem a institucionalização? Como realizar o momento da avaliação?

A fim de elaborar uma praxeologia associada a um saber matemático, Chevallard (2002) salienta ainda a importância de situar esse saber em uma escala hierárquica na qual cada nível refere-se a uma realidade e serve para determinar a ecologia das organizações matemáticas e didáticas relativas a esse saber. Isto é, para determinar os nichos e o hatitat destas organizações.

Nível -2	Sociedade
Nível -1	Escola
Nível 0	Pedagogia
Nível 1	Disciplina
Nível 2	Domínio
Nível 3	Setor
Nível 4	Tema
Nível 5	Objeto

Cada nível refere-se a uma realidade e serve para determinar a ecologia das organizações matemáticas e didáticas relativas a esse saber.
Em geral, os programas apresentados no primeiro encontro do ano letivo tratam apenas dos níveis 1, 2, 3, 4 e 5.

Em geral, os programas apresentados no primeiro encontro do ano letivo tratam apenas dos níveis 1, 2, 3, 4 e 5, não contemplando a fase transpositiva relativa à noosfera.
O conjunto de condições e necessidades que possibilita o desenvolvimento matemático (ecologia de uma praxeologia matemática) depende dos objetos ostensivos que compõem as tarefas, técnicas, tecnologias e teorias sendo essa dimensão ostensiva de uma praxeologia que permite que um saber matemático e os conhecimentos que ele pode construir se materializem.

Referências bibliográficas

BOSCH, Marianna; FONSECA, Cecílio; GASCÓN, Josep. *Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales em las instituciones escolares.* In: **Recherches em Didactique des Mathématiques**, v. 24/2.3, Grenoble, França: La Pensée Sauvage, 2004, p. 205-250.

BOSCH, Marianna, CHEVALLARD, Yves. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problematique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v.19, n°1, p.77-124, 1999.

BROUSSEAU, Guy. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage, v.7, n°2, p.33-115, 1986.

BROUSSEAU, Guy. *Théorie des situations didactiques*. Textes rassemblés et preparés par Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland, Virginia Warflied, Grenoble: La Pensée Sauvage éditions, 1998.

CHEVALLARD, Yves. L´analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 19.2, p.221-265, 1999.

_____. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 12.1, p.73-112, 1992.

_____. Organiser l´etude. 1. Structures & Fonctions. *Actes de la 11 École d´Été de Didactique des Mathématiques. France*: La Pensée Sauvage. 2002. Versão eletronica.

_____ . Organiser l´étude. 3. Ecologie & regulation. *Actes de la 11 École d´Été de Didactique des Mathématiques. France*: La Pensée Sauvage. p. 41-55, 2002.

CHEVALARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. *Estudar Matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CHEVALLARD, Yves, JOHSUA, M. A. Un exemple de la transposition didactique : la notion de distance. *Recherches en Didactique des Mathématique.,* Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 3.1, p.159-239, 1982.

CHEVALLARD, Yves, JOHSUA, M. A. *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 1991.

DUVAL, Raymond *Semios e pensée humaine.* Peter Lang, 1995.

DUVAL, Raymond. *L´analyse cognitive du fonctionnement de la pensée et de l´activité mathématique: cours sur les apprentissages intellectuels donné à la PUC-SP.* Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática – PUC-SP, 1999.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. *Novo Dicionário da Língua Portuguesa*. 2ª edição revista e aumentada. 29ª impressão. Rio de Janeiro: Nova Fronteira. 1986.

MIGUEL, Maria Inez Rodrigues. *Ensino e aprendizagem do Modelo Poisson: uma experiência com modelagem.* Tese de doutorado do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC-SP, 2005.

PERRIN-GLORIAN, Marie Jeanne. Problèmes d´articulation de cadres théoriques: l´exemples du concept de milieu. *Recherche en Didactique des Mathématiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage- Éditions, v. 19.3, p.279-321, 1999.

SILVA, Maria José Ferreira da. *Investigando saberes de professores de Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para quinta série*. Tese de doutorado do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC-SP, 2005.

http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p22

Engenharia didática: evolução e diversidade

Didactic engineering: evolution and diversity

Saddo Ag Almouloud

saddoag@pucsp.br

Maria José Ferreira da Silva

zeze@pucsp.br

Resumo

Neste artigo, serão apresentados estudos sobre a evolução e usos da noção de Engenharia didática expostos na École d´Été de Didactique des Mathématiques (Escola de Verão de Didática da Matemática), realizada em 2009 em Clermont-Ferrand, França. A discussão baseia-se, essencialmente, na Engenharia Didática Clássica (amplamente conhecida), denominada de Engenharia didática de 1ª Geração e a Engenharia didática de 2ª geração, de acordo com o ponto de vista de Marie-Jeanne Perrin-Glorian (2009), bem como a noção de engenharia do PER (Percurso de Estudo e Pesquisa), de Chevallard (2009), e de Domínios de Experiência de Boero (2009). A síntese das pesquisas analisadas, mostra os diferentes usos e concepções sobre esta metodologia, ora considerada metodologia de pesquisa científica, ora uma metodologia envolvendo vários processos e procedimentos para a formação profissional e/ou a elaboração de objetos de aprendizagem.

Palavras-chave: Engenharia didática de primeira geração. Engenharia didática de segunda geração. Engenharia do PER. Engenharia do Domínio de Experiência.

Abstract

In this paper we present studies on the evolution and uses the notion of didactics engineering presented at the Summer School Didactics of Mathematics held in 2009 in Clermont-Ferrand, France. We will discuss mainly the classic Didactics Engineering (widely known) that we call the Didactics Engineering of first Generation, the Didactics Engineering of 2nd generation from the point of view of Marie-Jeanne Perrin-Glorian (2009), as well as the notion of engineering (PER Course of Study and Research) of Chevallard (2009) and Fields of Experience Domain Engineering of Boero (2009). The synthesis of the research shows that we analyze the different uses and conceptions of methodology is, now considered the methodology of scientific research, now a methodology involving multiple processes and procedures for training and / or development of learning objects.

Keywords: Didactic engineering of 1st generation. Didactics engineering of 2nd generation. PER engineering. Experience Domain Engineering.

Introdução

Segundo Brousseau (2008 apud CHEVALLARD, 2009b, p. 81), a engenharia didática consiste em determinar dispositivos de ensino comunicáveis e reprodutíveis. Ela evoca a existência de uma descrição, um estudo e justificações tão precisas e consistentes que possíveis das condições de utilização deste dispositivo. Existe uma engenharia didática muito ativa, que é fruto de uma avaliação respeitável, mas abstém-se, geralmente, de fornecer análises precisas e justificações que poderiam iluminar os utilizadores.

Ainda segundo Brousseau, a engenharia didática propriamente dita acompanha os dispositivos produzidos de um conjunto de estudos e análises que dão as características do produto de acordo com os conhecimentos científicos teóricos e experimentais do momento. Estes estudos podem não ser comunicados aos professores, mas são indispensáveis para a análise das observações das atividades de ensino efetivamente realizadas.

Brousseau (2008 apud CHEVALLARD, 2009b, p. 81-82), esclarece que no âmbito das investigações científicas, a engenharia didática, com finalidade fenomenotécnica, tem por objeto conciliar as obrigações normais de ensino e a reprodução e o estudo de fenômenos didáticos bem determinados. Este tipo de investigação pode ser empreendido apenas em organizações específicas complexas e precisas, em especial, ela é indispensável para estudar sistematicamente e experimentalmente modelos teóricos de dispositivos de aprendizagem e de ensino.

Para Chevallard (2009b), pode-se distinguir de imediato uma engenharia didática de investigação, de uma engenharia didática de desenvolvimento. Apreende-se, em todos os casos, a existência de uma tensão entre dois polos, que o autor designará como a engenharia didática para o uso e a engenharia didática para o conhecimento. Para este autor, se suprimir a finalidade de conhecimento, volta-se à engenharia didática com finalidade “prática”, que tem em comum com a engenharia didática clássica, às vezes, apenas o nome, e com intenção diferente.

De acordo com Chevallard (2009b), a revisão da literatura permite identificar duas orientações, de um lado uma orientação de investigação em didática, em que se fala claramente da metodologia da engenharia didática, do outro uma orientação de desenvolvimento, que parece relativamente estranha à tradição estabelecida em didática da matemática.

Chevallard (2009b) destaca o fato geral da flutuação praxeológica associada a toda transposição institucional, fenômeno vinculado ao fato de os atores dos sistemas de investigação, bem como os de sistemas didáticos com os quais interagem, serem eles mesmos portadores de exigências e restrições, fruto de seus assujeitamentos (às vezes antigos) a diversas instituições, ou das exigências e restrições atuais que se impõem a eles.

Ainda, segundo este autor, essa flutuação está presente, em primeiro lugar, nos investigadores que não parecem, por exemplo, terem sido tentados a retomar fielmente a técnica que prevaleceria "em matemática". O que, segundo ele, marca os encaminhamentos institucionais, às vezes tortuosos (aparentemente), que caracterizam a divulgação (e a transposição) de uma criação metodológica que nasceu a priori "em matemática". Mas, Chevallard (2009b) chama atenção para o fato de que os apontamentos feitos por ele acima não devem dar a crer que "a metodologia da engenharia didática" teria migrado em todo o campo "educativo" ou mesmo apenas em "didática".

Chevallard mostra que a metodologia de engenharia didática está sendo usada em sentidos diferentes daquele entendido por Brousseau, inclusive por alguns dos pesquisadores da Didática da Matemática. Assim, a expressão "engenharia de formação" está hoje presente no título de um número importante de masters de formação de adultos (Leguy et al., 2005, pp. 16-19 apud CHELLARD, 2009b, p.85).

Para Pedra Pastré (2004 apud Chevallard, 2009, p. 85)

> A formação contínua tem uma tradição de engenharia de formação que é praticamente tão longa que a sua própria história. **Analisar um pedido, analisar necessidades, construir um dispositivo de formação, proceder à sua avaliação**: tantas atividades de engenharia que são um pouco as cartas de nobreza da formação profissional contínua. Porque esta é constituída historicamente como um campo de práticas, trata-se de práticas analisadas e bem pensadas, que a própria área inventou e codificou. (tradução nossa)

Ainda segundo Pastré (2004, p. 465 apud CHEVALLARD, 2009b, p. 85-86)

> Mas, a instituição desta engenharia de formação, que é talvez a invenção específica da formação profissional contínua nos seus trinta anos de existência instituída, deixou na estrada outro projeto, igualmente importante, mas sem dúvida menos urgente: a constituição de uma engenharia didática profissional, cujo objetivo é utilizar a análise do trabalho para construir conteúdos e métodos, visando a formação das competências profissionais. Assim, até os anos 80, deixou-se para

> atrás a necessidade de reconsiderar o ato didático, voltado para os adultos ao trabalho, em referência ao desenvolvimento das competências e da experiência profissional. Pode-se pensar - [...] - que esta questão voltada para a engenharia didática profissional tornou-se a urgência de hoje. (tradução nossa)

Pastré (2004 p. 465-466 apud CHEVALLARD, 2009b, p. 86) chama de ***engenharia de formação*** tudo o que trata da construção de dispositivos de formação, com a necessidade de articular objetivos, métodos e conteúdos; e ***engenharia didática profissional*** tudo o que diz respeito à produção de recursos educativos, utilizando ou não novas tecnologias, mas apoiando-se sobre situações de trabalho que servem de apoio à formação e ao desenvolvimento das competências profissionais.

Pastré (2004, p. 466, apud CHEVALLARD, 2009b, p. 86) escreve também: "A didática profissional procura analisar a aquisição e a transmissão das competências profissionais para melhorá-las". A existência, segundo Chevallard, se confronta com uma noção de engenharia didática que parece querer focalizar em primeiro lugar práticas de engenharia.

Ainda segundo Pastré (2004, p.466 apud CHEVALLARD, 2009b, p. 86)

> Como a engenharia de formação, a engenharia didática profissional tem por objetivo ir além da fase de uma simples acumulação de práticas sem princípios, para procurar fundar racionalmente as práticas que se propõe a desenvolver. Apoia-se nas referências teóricas, que se pode situar na interface, e no prolongamento histórico da ergonomia cognitiva de um lado e da didática das disciplinas científicas do outro. (tradução nossa)

Chevallard (2009) afirma que, na perspectiva na qual se situam estas definições, "os sistemas" e produtos para se "conceber e realizar" não foram pensados normalmente para o benefício da investigação fundamental, mas foram concebidos ao benefício de utilizadores externos e ao pequeno mundo da investigação. O autor assevera que, em um caso, a engenharia didática está a serviço da pesquisa em didática, cujas necessidades impulsionam o desenvolvimento; no outro, a investigação em didática se coloca a serviço da engenharia didática, ela mesma a serviço de uma vontade diversificada de desenvolvimento institucional. Tal é, segundo Chevallard (2009b), "a tensão bipolar" que a noção de engenharia didática vivencia. Essa tensão é vivida dentro da área de Didática da Matemática, como mostrado na discussão sobre a Engenharia Didática Clássica (amplamente conhecida), denominada Engenharia didática de

1ª Geração, e a Engenharia didática de 2ª geração, segundo o ponto de vista de Marie-Jeanne Perrin-Glorian (2009), bem como a noção de engenharia do PER (Percurso de Estudo e Pesquisa), de Chevallard (2009a e 2009b), e de Domínios de Experiência de Boero (2009).

Engenharia Didática de 1ª geração

Lembramos que a noção de Engenharia Didática (clássica ou de primeira geração) emergiu na didática da matemática no início dos anos 1980. Primeiramente em 1982 por Yves Chevallard e Guy Brousseau, depois, em 1989, por Michèle Artigue. Ela foi apresentada como uma metodologia de pesquisa suscetível de fazer aparecer fenômenos didáticos em condições mais próximas possíveis do funcionamento de uma sala de aula clássica.

Segundo Artigue (1988), o termo "engenharia didática" foi concebido para o trabalho didático comparável ao trabalho de um engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos de sua área, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar objetos bem mais complexos do que os objetos depurados da ciência e, portanto, enfrentar, com todos os meios que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta.

Ainda, segundo Artigue, esta metodologia se caracteriza por um esquema experimental baseado nas realizações didáticas em sala de aula, ou seja, sobre a concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino, permitindo uma validação interna a partir da confrontação das análises a priori e a posteriori. Uma pesquisa, seguindo os princípios de uma Engenharia Didática, perpassa pelas fases seguintes:

1. *Análises preliminares*: considerações sobre o quadro teórico didático geral e os conhecimentos já adquiridos sobre o assunto em questão, incluem a análise epistemológica do ensino atual e seus efeitos, das concepções dos alunos, dificuldades e obstáculos, e análise do campo das restrições e exigências no qual vai se situar a efetiva realização didática.
2. *Concepção e análise a priori das situações didáticas*: o pesquisador, orientado pelas análises preliminares, delimita certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre os quais o ensino pode atuar, chamadas de variáveis de comando (microdidáticas ou macrodidáticas). Na análise a priori devem ser levados em consideração os seguintes pontos:

- Descrever as escolhas feitas no nível local (relacionando-as eventualmente com as seleções globais) e as características da situação adidática desenvolvida;
- Analisar o que poderia estar em jogo nesta situação para o aluno, em função das possibilidades de ação, seleção, decisão, controle e validação que o aluno terá durante a experimentação.
- Prever campos de comportamentos possíveis e tentar demonstrar como a análise permite controlar seus significados e assegurar, particularmente, que se tais comportamentos esperados ocorreram, é por consequência do desenvolvimento visado pela aprendizagem.

3. *Experimentação*: consiste na aplicação da sequência didática, tendo como pressupostos apresentar os objetivos e condições da realização da pesquisa, estabelecer o contrato didático e registrar as observações feitas durante a experimentação.
4. *Análise a posteriori e validação*: A análise a posteriori consiste em uma análise de um conjunto de dados colhidos ao longo da experimentação, como por exemplo, produção dos alunos, registros de observadores e registro em vídeo. Nessa análise, se faz necessário sua confrontação com a análise a priori para que seja feita a validação ou não das hipóteses formuladas na investigação.

Engenharia de segunda geração

Segundo Perrin-Glorian (2009), a engenharia didática encontra-se na interface entre a pesquisa e o ensino regular. Para a autora, os primeiros trabalhos considerados “engenharias didáticas” situam-se no ensino da Matemática no primário (números e medidas), sendo que a elaboração das sequências de ensino foi feita nos anos 70, uma época em que o referencial teórico utilizado não era explicitado, e foi essa elaboração, segundo a autora, que contribuiu para a explicitação dos quadros teóricos. Dessa forma, essas primeiras engenharias didáticas tinham por objetivo a elaboração e o estudo de uma proposta de uma transposição didática para o ensino, sendo essa transposição didática o objetivo principal da pesquisa. Mas, ao mesmo tempo, estudavam-se, também, outros fenômenos didáticos mais gerais que permitiam enriquecer e ampliar os quadros teóricos em construção.

O que era estudado, segundo a autora, do ponto de vista adidático, eram as situações, sem estudar o papel do professor, mesmo sabendo que ele é incontornável na devolução, na institucionalização ou na efetivação da dialética ferramenta objeto. As situações foram elaboradas por professores experientes, muito competentes e interessados pela pesquisa, sendo que depois desta fase de pesquisas, as engenharias didáticas tornaram-se especificamente metodologias de pesquisa, sobretudo após a síntese de Michèle Artigue (1998).

A engenharia didática agrega algumas das características da pesquisa-ação, já que se desenvolvem nela situações de sala de aula onde o pesquisador é levado a descrever e analisar os resultados de sua aplicação, tomando os devidos cuidados em relação ao grau de generalidade dos resultados.

Uma engenharia didática de segunda geração, segundo Perrin-Glorian, tem por primeiro objetivo o desenvolvimento de recursos (ou objeto de aprendizagem) para o ensino regular, ou a formação de professores. O que, consequentemente, necessita de vários níveis de construção. Podem-se distinguir dois tipos de engenharias didáticas em função da pergunta inicial da investigação, sendo a Engenharia Didática para a Investigação (IDR) e a Engenharia Didática de Desenvolvimento (IDD).

Na IDR procura-se fazer emergir fenômenos didáticos e estudá-los, com a intenção de um avanço nos resultados da investigação, por meio de experimentações montadas em função da questão de pesquisa, sem preocupação imediata de uma eventual divulgação mais ampla das situações utilizadas. Por outro lado, na IDD, o objetivo é a produção de recursos para professores ou para a formação de professores.

De acordo com a autora, os conhecimentos dos alunos são controlados teoricamente em todos os casos, mais é uma variável mais ou menos fixada na IDR, enquanto no caso da IDD é necessário prever adaptações dessas situações e meios para conduzi-los. O papel do professor é controlado pela teoria, no caso da IDR. Enquanto na IDD, uma flexibilidade nas decisões deve ser prevista. E, por fim, as exigências institucionais podem ser negligenciadas no caso da IDR, são incontornáveis no caso da IDD e consequentemente devem ser levadas em consideração teoricamente.

No caso da IDR, se o objetivo é estudar as situações e as potencialidades do meio para fazer evoluir os conhecimentos dos alunos, o professor ocupa o lugar de professor e de investigador, porém, suas ações, enquanto investigador, devem ser transparentes. Já no caso da IDD, o professor não faz parte da investigação, ele tem a inteira responsabilidade pelo ensino na sua classe.

Para ilustra as reflexões acima tecidas sobre a engenharia didática de segundo geração, um exemplo de pesquisa realizada por Perrin-Glorian e colaboradores é apresentado neste estudo. Trata-se de um trabalho sobre a simetria axial. Segundo Perrin-Glorian (2009, p. 71-75), a investigação foi realizada no primário e na 6ª série. O objetivo principal é o desenvolvimento de recursos para as classes regulares e a formação de professores. A análise do conteúdo realizada pela equipe não está relacionada aos currículos escolares atuais ou passados, está mais ligada a uma abordagem da geometria plana no primário. A escolha da simetria foi feita porque envolve as questões essenciais levantadas por esta abordagem, e porque faz parte, ao mesmo tempo, dos currículos prescritos do primário e de 6ª série. A pesquisa apoiou-se nas observações prévias relativas às práticas comuns, a partir de entrevistas realizadas com professores, na experiência dos formadores, estudos prévios realizados sobre pesquisas relacionadas com os processos de ensino e aprendizagem da geometria e o papel das figuras nesses processos. A problemática de investigação tem com principais preocupações:

5. a produção de recursos para o ensino regular.
6. a investigação de uma (ou várias) situação(ões) fundamental(ais) com um meio adequado à análise do saber geométrico e acessível à cultura atual dos professores, suas exigências e condições materiais (em especial o tempo em termos de preparação do material e tempo pedagógico) e de gestão de classe;
7. as sessões não devem exigir do professor um grande investimento e um tempo maior do que o tempo pedagógico;
8. as possibilidades de adaptação das situações, em função da execução da tarefa e das produções dos alunos, a viabilidade dessas situações para o ensino regular, os conhecimentos matemáticos e didáticos dos professores, necessários para a experimentação das situações e as necessidades para a formação.

Perrin-Glorian (2009) identifica dois níveis de engenharia didática: No primeiro nível, usou-se uma metodologia bastante clássica em várias etapas, sem necessariamente, segundo a autora, exercer completamente o mesmo tipo de controle sobre as situações da engenharia didática clássica:

1. Criação de uma sequência de situações que colocam em jogo os princípios que correspondem à análise do saber e do “milieu”;

2. Os professores não participam desta primeira fase, porém é previsto analisar a viabilidade das situações em classes regulares, em especial, no que diz respeito à preparação do material;
3. Um documento é redigido e enviado aos professores duas ou três semanas antes da data prevista para uma primeira entrevista;
4. Este documento deve fornecer os elementos essenciais relativos aos saberes visados e o “milieu”;
5. No documento não estão detalhados nem a preparação, nem os procedimentos esperados.
6. Negociação desta sequência de situações, a partir de uma entrevista prévia com professores (escolhidos e interessados).
7. Alterações eventuais são introduzidas em uma colaboração professor/investigador para atender às expectativas e perguntas dos professores, e levar em conta o nível dos alunos (o mesmo documento é proposto aos professores de todo o ciclo 3 e 6ª série);
8. A experimentação deve ser feita em seis sessões, no máximo, e terminar por uma avaliação dos alunos. Estas sessões constituem, para os professores aplicadores, o essencial do ensino da simetria ortogonal naquele ano.
9. Observação das sessões alteradas nas classes e análise dos resultados com o professor, em discussões informais em fim de sessão, e acompanhada de uma entrevista.
10. Análise, pela equipe de investigação, por confrontação dos três tempos: análise a priori, alterações introduzidas nas situações, análise a posteriori da experimentação, que deve permitir responder às seguintes perguntas: Quais modificações foram feitas? O que motivou essas modificações? A sessão desenrolou-se como previsto após modificação? Se não, quais as diferenças e como explicá-las?

Segundo Perrin-Glorian (2009), neste primeiro nível, o importante são as situações e o “milieu” que as compõe, o caráter fundamental dessas situações, a sua robustez, bem como suas exigências e o seu potencial de auto formação para os professores que a experimentaram. Para avançar na construção de recurso, Perrin-Gloriam acha importante buscar resposta às seguintes questões: As situações permitem produzir os conhecimentos previstos em relação aos alunos? Elas foram dispendiosas para os professores? Como alterá-las para aumentar a sua eficácia, a sua maneabilidade? Ainda segundo ela, a questão do custo para os professores é uma questão nova em relação à engenharia didática clássica, mas é essencial, na perspectiva do desenvolvimento e do segundo nível da experimentação.

Perrin-Glorian (2009) aponta alguns resultados desse nível. Ela destaca a dobradura de uma folha de papel e a reversão de um decalque:

1. Constituem meios materiais muito diferentes do ponto de vista da noção de figura simétrica e da determinação do seu eixo de simetria;
2. Não são comandadas pelos mesmos conhecimentos nem pelos mesmos gestos.
3. A relação entre os dois pode fazer-se apenas recorrendo à noção de simétrica de uma figura em relação a um eixo.
4. Uma situação fundamental para a noção de figura simétrica deve permitir abordar a noção de simétrica de uma figura em relação a um eixo.
5. No que diz respeito ao "milieu" material, ele é essencial no que tange à geometria no primário e na sexta série. O "milieu" material intervém fortemente nos conhecimentos em jogo para agir sobre este "milieu", porque as propriedades geométricas aparecem por intermédio de ações físicas muito precisas sobre o material. Consequentemente, a preparação do material e a sua gestão em classe são aspectos essenciais do trabalho do professor e conduzem a exigências importantes em relação ao tempo. Do lado dos alunos, a realização das atividades exige conhecimentos não matemáticos sobre as propriedades do material e suas possibilidades de uso.

A autora assevera que as diferenças em relação aos saberes (por exemplo, com a dobradura é necessário conhecer o eixo de simetria ou fazer uma hipótese sobre a sua posição para decidir se uma figura é simétrica ou não, enquanto que com o decalque não se tem necessidade de conhecer o eixo), às manipulações e formulações tinham sido esclarecidas no documento entregue aos professores. Contudo as dificuldades no uso do decalque revelaram-se mais importantes do que o previsto. Independentemente da ordem na qual se utiliza os dois meios, tanto no decalque quanto na dobradura, é preciso ver em uma figura simétrica duas subfiguras em que cada uma é o reverso da outra e que essas duas subfiguras são simétricas em relação ao eixo.

Segundo a autora (p. 74), a primeira experimentação permitiu identificar nas situações, elementos fundamentais que não foram necessariamente percebidos a priori. Ela permitiu também levar em consideração as exigências e restrições relativas ao trabalho do professor e aos conhecimentos prévios dos alunos.

No segundo nível, Perrin-Glorian (2009, p. 74) identificou com mais acuidade as dificuldades e exigências especificas da IDD. O documento destinado aos professores deve ser alterado em função dos resultados do nível 1 da IDD, e é preciso integrar nas situações os elementos essenciais (ou seja meios, tarefas e organizações didáticas) e as suas relações com o saber visado. Um contexto preciso, com suas variáveis e suas exigências, deve ser explicitado de modo que se possa encarar a maneira como as propriedades matemáticas podem ser estudadas a partir do material. Assim, ela aponta as dificuldades em caracterizar as situações em função dos determinantes fundamentais dos meios. Neste nível, devem-se integrar alguns dos professores que já participaram do projeto e outros que não participaram da primeira experimentação. Além disso, destaca-se a importância da realização de um seminário, cujos participantes seriam os pesquisadores e os professores em formação.

Finalmente, Perrin-Glorian (2009) evidencia três condições para a realização de uma engenharia didática para o desenvolvimento (IDD):

1. Deixar uma certa liberdade de ação ao professor: esta condição já é válida no primeiro nível, mas agora trata-se de definir a sequência de situações com o professor e analisar como o professor adapta o documento que lhe é fornecido.
2. Utilizando os documentos produzidos, os professores devem procurar não reproduzir a história, mas as condições da aprendizagem, a questão essencial para a engenharia didática, sendo como identificar os elementos essenciais para a realização efetiva da atividade.
3. É necessário apoiar-se em uma engenharia didática de primeira geração que possibilite a construção de uma situação fundamental e sua análise.

A engenharia didática de desenvolvimento é, segundo Perrin-Glorian (2009), ao mesmo tempo uma engenharia didática para o desenvolvimento de recursos e para a formação de professores envolvidos no projeto. O tamanho das engenharias é uma questão importante para a engenharia de desenvolvimento e a produção de recursos. Uma situação isolada pode ser desenvolvida facilmente, mas não se pode esperar um efeito positivo na prática dos professores, aliás este tipo de situações pode ter, às vezes, um efeito negativo nos processos de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. A engenharia de desenvolvimento está fortemente ligada às investigações nos saberes matemáticos necessários aos professores para ensinar a matemática. É neste sentido que ela está ligada à formação.

Engenharia dos Domínios de Experiência

Outro tipo de engenharia foi apresentado por Boero (2009) no artigo intitulado ”Os Domínios de Experiência no ensino-aprendizagem: ligar o trabalho escolar com a experiência dos alunos”.

O objetivo é estudar engenharias didáticas para crianças entre seis a 14 anos, no campo da didática da experiência. Segundo o autor, essas engenharias constroem um lugar de encontro, na escola, entre a experiência (real ou potencial) dos alunos fora da escola e, em classes avançadas, bem como a experiência matemática familiar e significativa (como no caso da aritmética) por um lado, e a cultura matemática, cujo professor é o responsável e o mediador na classe, por outro.

O termo "engenharia didática" foi usado por Boero em um sentido mais amplo, no que diz respeito à concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino sem, no entanto, lhe dar o mesmo status que ele tem na teoria das situações didáticas. Para o autor, a concepção pode ser, por exemplo, a escolha motivada de uma série de situações problema abertas sobre um tema não necessariamente matemático. Seu papel é permitir a mediação (por parte do professor) de ferramentas matemáticas por meio de sua resolução. Quanto à análise, ela pode ser feita de acordo com diferentes perspectivas de teorias que contribuem para o projeto.

Entre vários exemplos apresentados por Boero (2009), destaca-se a constituição do domínio de experiência da Aritmética entre alunos de nove a 11 anos. Segundo o autor, as crianças de nove anos de idade participaram da construção do algoritmo de divisão. Esta construção apoia-se em um encaminhamento progressivo das situações problema, contextualizadas nos domínios de experiência para uma reflexão sobre a natureza da divisão como operação. As crianças de 10 a 11 anos podem chegar a tratar questões teóricas envolvendo conjecturas e provas sobre divisores comuns de dois inteiros consecutivos.

Boero (2004) aponta o papel crucial das atividades no processo de enculturação, nesse processo as atividades (e não os objetos da matemática e de outras disciplinas) são o cerne do trabalho em classe. Os objetos das disciplinas (conceitos, métodos, algoritmos, etc.) emergem das atividades tais como "objetos-em-ato", e o professor pode decidir de torná-los explícitos no momento certo, ou oferecê-los como ferramentas para responder às perguntas que surgem no tratamento de uma situação problema.

Boero considera a Engenharia dos Domínios de Experiência como uma metodologia didática e uma abordagem das disciplinas escolares inspirada na leitura de Vygotsky, em especial no que diz respeito à necessidade de enculturação das crianças, idas e voltas do trabalho escolar na experiência cultural espontânea da criança fora da escola, as contribuições específicas de diversas disciplinas para o desenvolvimento intelectual da criança, a importância transversal da linguagem natural (hipótese vygotskiana sobre as funções da linguagem natural no desenvolvimento do pensamento), e o papel mediador do professor na zona de desenvolvimento Proximal dos alunos. Além disso, o autor acha importante lidar com todas as principais disciplinas do professor, entre outros, ensinar matemática.

De acordo com o autor, a escolha dos eixos norteadores acima reúne duas exigências importantes para os investigadores como para professores e alunos: assegurar um equilíbrio temporal entre as várias disciplinas (evitando um excesso de trabalho em matemática, o que acontece muitas vezes, quando diz respeito apenas à matemática) e garantir a coerência e homogeneidade metodológica do trabalho em classe.

Os projetos de pesquisa dirigidos por Boero foram inspirados por ideias teóricas emprestadas do debate contemporâneo (em matemática, aprendizagem, cultura e ensino), com uma implementação original no que diz respeito à escolha do objeto de estudo durante um período suficientemente longo. Por outro lado, era esperada que as experimentações realizadas nas classes (classes dos professores - pesquisadores que colaboram com a equipe da Universidade, mas também muitas classes dos professores associadas ao grupo de pesquisa e disponíveis para experimento "bem controlado") sejam também portadoras de questionamentos e de novos temas de investigação.

Boero (2009) elenca três razões que justificam a escolha dos Domínios de Experiência (alunos de 6 a 14-15 anos): motivação do aluno; melhor aprendizagem da matemática útil na vida, por meio da aprendizagem de seu uso a partir da realidade; facilidade do surgimento de determinados conceitos (principalmente geométricos) se trabalhados sobre realidades bem selecionadas.

Afinal, o que são Domínios de Experiência? De acordo com Boero (2009), o conceito de "Domínios de Experiência" é uma área da cultura humana que se desenvolve na classe pelo intermédio da ação de mediação do professor que se apoia nos signos, objetos e nas restrições do domínio, visado para guiar, segundo sua cultura e suas intenções, a evolução das práticas e concepções dos alunos sobre esse domínio. Os Domínios de Experiência dizem respeito ao inicio da escola primária, à realidade extracurricular acessível a todos os alunos (como por exemplo, a moeda e os preços para seis anos, ou o crescimento de plantas para os alunos de sete anos).

Segundo o autor, em um determinado nível de escolaridade, alguns domínios da matemática (como a aritmética) também se tornaram domínio de experiência para os alunos, que agora têm um extenso repertório de fatos e comportamentos matemáticos para desenvolver seus conceitos.

Vale aqui ressaltar os objetivos principais visados pela equipe de Boero:

1. Supervisionar os processos de ensino e aprendizagem em uma perspectiva unificadora, independente do tema (matemática ou não) abordado. Segundo o autor, os tópicos abordados na classe devem ser importantes do ponto de vista da cultura extraescolar, e pelo menos potencialmente, ressonantes com a experiência do estudante, incluída sua experiência escolar. Assim, admite-se que o estudante, no momento do início da resolução da tarefa, tenha ampla experiência do assunto, ou uma experiência que está sendo construída no trabalho escolar.
2. Na classe, o professor deve gerenciar uma dinâmica de ensino e aprendizagem ao longo de muito tempo, envolvendo, sobretudo, um determinado assunto de estudo, sua experiência cultural e profissional, a experiência cultural de estudantes e algumas restrições e/ou oportunidades que derivam de elementos objetivos que pode-se encontrar ou associar a esse campo (por exemplo, exigências e restrições físicas, objetos materiais específicos do domínio e os sinais desenvolvidos pela cultura para sua representação externa e seu tratamento)
3. Selecionar tópicos de estudo suficientemente amplos (para evitar a fragmentação da oferta cultural aos estudantes), mas também homogêneos (com respeito ao seu tratamento na classe): portanto, temas amplos, mas fáceis de identificar pelos alunos, com um vocabulário que apresenta termos específicos que têm significação unívoca e representações mentais habilitadas sem ambiguidades.

4. Selecionar temas que permitem construir, em um determinado nível escolar, conhecimento importante tanto do ponto de vista do domínio destes temas, quanto do ponto de vista da aprendizagem em uma ou mais disciplinas. Por exemplo, um tema importante, como a transmissão das características hereditárias dos seres humanos, não parece acessível aos alunos da escola primária, enquanto para os alunos de 12 a13 anos o tema é susceptível de articular muitas questões e preocupações dos estudantes.

A teoria dos Domínios de Experiência foi elaborada no intuito de estudar a relação entre as práticas dos sujeitos, sobretudo, na sua dimensão cultural, e os saberes que eles mobilizem ou constroem. Além disso, visa-se também agir, no quadro escolar, sobre a construção de saberes a partir das relações culturais evidenciadas. A perspectiva cultural leva em consideração também os componentes materiais e simbólicos das atividades, bem como as concepções desenvolvidas pelos sujeitos. A abordagem dos Domínios de Experiência fornece ferramentas para refletir sobre as condições culturais da aquisição de saberes pelos alunos e para proporcionar dispositivos didáticos apropriados. Ela coloca em jogo fatores culturais e questões epistemológicas a proposito dos saberes escolares, bem como questiona a natureza desses saberes do ponto de vista das práticas sociais que lhe são relacionadas, e seus quadros culturais.

De acordo com Douek (2005), um domínio de experiência são essas esferas de atividades socialmente estáveis, e que podem, dependendo do caso, envolver, muitas vezes, vários tipos de práticas e conceitos. Estes últimos podem ser de tipos quotidianos, científicos, ou dos dois no sentido de Vygotsky.

Segundo Douek (2005, p. 265), trata-se de:

> - Reconhecer, mesmo que fosse difícil de definir sua fronteira, um domínio da cultura que seja coerente e homogêneo; esse domínio é reconhecível pelas práticas que nele se desenvolvem, pelo saber que nele se estabelece, de forma institucionalizada, as diversas representações simbólicas que nele são usadas, que sejam formalmente estruturadas, esquemáticas ou mais "naturais".
> - Reconhecer os protagonistas envolvidos: os professores e os alunos, a fim de levar em consideração algumas das características de suas práticas e das possibilidades de desenvolvimentos dessas e de seus saberes, no que diz respeito um dado domínio de experiência. (tradução nossa)

Ainda, segundo a autora, "nesta perspectiva, uma análise epistemológica das categorias de práticas culturais, de redes de conceitos desenvolvidas nessas práticas, e suas relações com conceitos do campo escolar, é necessária"(p. 265).

De acordo com Boero (2009, p. 123), o

> "Domínio de Experiência" é um domínio da cultura (no sentido de Hatano & Wertsch, 2001), suscetível de atividades em um ou várias disciplinas, coerentes e

> homogêneas, reconhecíveis pelas práticas que se desenvolvem e estabilizam em uma determinada comunidade, os conhecimentos que se estabelecem nessas comunidades de uma forma mais ou menos institucionalizada, as diferentes representações simbólicas estão em uso (que sejam formalmente estruturadas, esquemáticas ou mais "naturais", como no caso dos desenhos, descrições verbais etc). (tradução nossa)

Para o autor, trata-se, para o trabalho escolar nos Domínios de Experiência, de proporcionar aos alunos condições para desenvolver as aprendizagens escolares na base de práticas culturais de referência atualizadas. Para este efeito, ele caracteriza um Domínio de Experiência por três aspectos:

1. O contexto externo desse domínio: restrições da "realidade" – meio mais ou menos materiais, representações simbólicas, regras e usos sociais (a utilização da moeda), etc.
2. O contexto interno do professor, caracterizado por seu conhecimento em relação ao domínio visado (incluindo habilidades didáticas relativas ao domínio), suas práticas e concepções, com a quota de subjetividade e referências culturais.
3. O contexto interno do aluno, caracterizado também por seus conhecimentos, suas práticas e suas concepções, sobre o campo em jogo, com a sua subjetividade e referências culturais.

Segundo Douek (2005), uma das características da Didática dos Domínios de Experiência é ensinar a língua (expressões, leitura e escrita) e a matemática por intermédio de trabalhos longos (de três meses a três anos) que estabelecem, desenvolvem e exploram o domínio de experiência, que, geralmente, envolve diversas disciplinas como a biologia, a história, a geografia, etc.

Engenharia didática de PER

Chevallard (2009b), no seu artigo intitulado "A engenharia didática, um conceito a refundar. Questionamentos e elementos de respostas a partir da TAD[1]", discute a engenharia didática do PER.

[1] Teoria Antropológica do Didático.

Segundo Chevallard (2009b), um ponto de partida poderia consistir em olhar "o método da engenharia didática" como um caso específico que oferece ao investigador as possibilidades únicas "de uma metodologia" da investigação em didática. "A metodologia" refere-se, então, ao que Chevallard chama de praxeologias de investigação, colocadas em jogo em um domínio dado ou em uma pesquisa específica.

Este autor observa que o trabalho coletivo sobre praxeologias de investigação em didática, parece hoje mais necessário do que nunca para combater os efeitos dos caminhos maquinalmente trilhados, ou a quase naturalização dos métodos usados.

Chevallard explica a terminologia "didática de investigação codisciplinar", descrevendo esse conceito-chave da seguinte forma: "Uma questão Q a ser estabelecida, num sistema didático S(X; Y; Q) onde X é um coletivo de estudo (uma classe, uma equipe de estudantes, etc.) e Y um grupo (geralmente reduzido, ou mesmo inexistente) de auxiliares e diretores de estudo (professor, tutor, etc.). A finalidade da constituição desse sistema é estudar Q e procurar uma resposta R que satisfaça algumas restrições a priori, confrontando com 'meios didáticos' apropriados".

Chevallard diz que esse trabalho de investigação agrega ferramentas praxeológicas de várias disciplinas, ou seja, é codisciplinar. Segundo o autor, envolver-se numa tal investigação é engajar-se num Percurso de Estudo e Pesquisa (PER[2]) motivado por essa mesma pesquisa. Ele esclarece, ainda, que para desenvolver a resposta R, de fato, é conveniente coletar e organizar um "milieu" de trabalho M, que reúne recursos novos e antigos que X irá usar. Esses recursos, certamente serão "todas" as respostas à Q, validadas por uma instituição particular, e denotada por $R^{\Diamond}$. A análise destas respostas deve fornecer materiais para a construção da resposta R, ela será denotada por $R^{\heartsuit}$. Outras obras "O" serão da cultura, qualquer que seja a "dimensão" cultural que fornecem ferramentas para a análise das respostas $R^{\Diamond}$, e da construção da resposta esperada $R^{\heartsuit}$. As obras "O" serão parcialmente desenhadas em várias disciplinas, embora algumas sejam "disciplinas" não reconhecidas porque são emergentes ou culturalmente vilipendiadas. Chevallard apresenta o que ele chama de "esquema herbatien" que pode ser observado na seguinte forma condensada por $(S(X;Y;Q) \rightarrow M) \hookrightarrow R^{\heartsuit}$ e, da forma desenvolvida por: $[S(X;Y;Q) \rightarrow \{R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, ..., R_n^{\Diamond}, O_{n+1}, ..., O_m\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$.

[2] Parcours d´Étude et de Recherche

Segundo o autor, a noção de PER permite englobar práticas mais ou menos diferentes das práticas sociais de conhecimento: pesquisa científica, investigação policial ou jornalística, etc. O estudo escolar é, todavia, o que parece ser o menos passível de modelagem em termos de PER e, na verdade, é possível imaginar as formas mais tradicionais de ensino, e dizer que elas requerem uma investigação sobre Q, é o fato de o professor ter lugar em outra cena da classe; ao aluno é oferecido uma resposta pronta $R^{\Diamond}$, autenticada pelo professor, que será a resposta $R^{\heartsuit}$ da classe: ele deverá estudá-la, como será a resposta $R^{\Diamond}$ relatada num "milieu" M pela classe X, se os alunos tiveram tempo livre para respondê-lo. Ou seja, esse movimento retrata onde cada cidadão ou grupo de cidadão deve ser capaz de investigar qualquer assunto que escolher e usar as ferramentas praxeológicas de sua formação escolar.

Chevallard relata, que a noção de PER surgiu fora das aulas de matemática, e é isto que levou a uma primeira generalização do princípio essencial de PER codisciplinar, com domínio eventualmente disciplinar ou bidisciplinar associado ao "esquema herbatien". O autor também enfatiza quatro características que devem ser enfatizadas a partir da noção de PER, associada à investigação codisciplinar:

- O dispositivo do PER levantado a respeito do ensino da matemática é uma importação do dispositivo de TPE (Travaux Personnels Encadrés).
- Nessa importação, a codisciplinaridade é colocada entre parênteses, pois, o PER em questão, está voltado para a "matemática" (que o autor nomeou de PER monodisciplinar), no caso da aula de matemática, podemos falar em "investigações matemáticas".
- A investigação codisciplinar aberta agrega as ferramentas com o "milieu", que a priori é qualquer "milieu" M, que pode ser elegível.
- Com relação à questão Q estudada, deve-se levar em conta a generalidade desta questão, ou seja, sua capacidade de gerar outras perguntas.

Chevallard enfatiza, que na pedagogia AER (Activité d´Enseignement et d´Étudde) e PER, exige-se que os professores revisem sua relação com o saber matemático. Ele afirma que quando um currículo é construído em torno de uma pedagogia dada, é formada uma infraestrutura educacional, didática/matemática ou matemática/didática, que permite a implementação desta pedagogia. Ele chama de infraestrutura didática as condições de ensino e restrições que a maioria das organizações matemáticas explora dentro das limitações impostas pelo sistema. Criar uma infraestrutura didática matemática adequada a uma pedagogia AER (ou situações) está fora do alcance de “simples” professores. De acordo com o autor, um projeto como esse exige a mobilização de imensas forças produtivas nessa área. Ele afirma, ainda, que mesmo a infraestrutura adequada ao professor é uma tarefa difícil e rara. Assim, tal dispositivo tem um papel estratégico para a formação inicial e continuada de professores, na medida em que elimina o risco de querer formar professores a partir de um equipamento praxeológico (EP) imutável, o qual deve ser deixado sob a responsabilidade do professor para mobilizá-lo em situações concretas. De outro modo, os EP disponíveis passam a ser objetos questionáveis, a partir das necessidades praxeológicas que se criam no exercício da profissão, e constituindo-se no estudo das questões, problemas ou necessidades, que estão na origem do processo de formação que, por sua vez, levarão a reformulações desses EP disponíveis. O autor (2009a, p. 4) ilustra esta situação com um exemplo de PER para construir uma calculadora gráfica relatada a seguir.

A pergunta Q a estudar é: “como construir uma calculadora gráfica?”, pergunta cujo estudo, segundo o autor, deve provocar o encontro com o essencial das praxeologias geométricas a estudar no colégio. Por exemplo, quando se interroga sobre como construir a raiz quadrada de um número inteiro, pode-se obter uma resposta por meio do teorema de Pitágoras: dado que $5 = 1 + 4 = 1^2 + 2^2$, obtém-se a construção medindo-se a hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos lados medem 1 e 2. Se existe também $5 = 9 – 4 = 3^2 – 2^2$, obtém-se de novo $\sqrt{5}$ como a medida do segundo cateto de um triângulo retângulo, cujo primeiro cateto mede 2 e a hipotenusa mede 3.

Pode-se buscar resposta às seguintes perguntas: Para quais inteiros estas técnicas “funcionam”? Ou seja, qual é o seu alcance, em outros termos, quais são os números inteiros que podem ser escritos como uma soma ou como uma diferença de dois quadrados? A resposta à segunda pergunta é fácil estabelecer: são os inteiros ímpares (pois, $2k + 1 = (k + 1)^2 – k^2$), bem como os múltiplos de 4 (pois, $4k = (k + 1)^2 – (k – 1)^2$).

Segundo Chevallard (2009a), a resposta à primeira pergunta não é do nível de 4.o de colégio (oitava série do Ensino Fundamental II): a classe deverá eventualmente procurar esta solução em documentos mais avançados para descobrir e compreender (parcialmente) a afirmação, segundo a qual um inteiro é a soma de dois quadrados, apenas se “cada um dos seus fatores primos da forma 4k + 3 intervém elevado a uma potência par” (Wikipédia, artigo “Teorema dos dois quadrados de Fermat”, apud CHEVALLARD, 2009a, p. 4).

Chevallard (2009a) assevera que, naturalmente, como num trabalho científico, a classe poderá ser bloqueada pela dificuldade deste resultado. Mas poderá, também, além disso, interrogar-se como estender as técnicas encontradas ao caso dos números decimais não inteiros, por exemplo. Uma pergunta geradora de um PER pode, assim, ser retomada para prolongar o inquérito - ou retomá-la.

O autor esclarecer as razões originais da passagem da noção de AER à noção de PER. Ele examina alguns princípios fundamentais que devem guiar à concepção, construção e realização de um ensino renovado. O primeiro princípio consiste em não procurar realizar AER "isoladas", visando cada uma "gerar" um (e só um) elemento matemático - tal teorema, tal definição, tal noção, etc. Convém, pelo contrário, autorizar-se a conceber e realizar AER com a finalidade matemática ampla, embora se dando para alvo certos temas ou assuntos do currículo prescrito do ano. Isso não significa que não se deva propor AER "de pequeno porte", e impor "um corte milimétrico" do matematicamente novo que uma dada AER é suposta fazer descobrir.

Nesta perspectiva, segundo o autor, o programa do ano pode ser estudado por meio de um determinado número de "grandes AER", esse conjunto de AER pode ser chamado de Percursos de Estudo e de Investigação (PER), e que podem ser divididas em AER no sentido mais usual do termo: um PER aparece então como um verdadeiro "percurso de descoberta" ou "um programa de estudo e de investigação".

Segundo Chevallard (2009a), a noção de PER codisciplinar pode englobar um amplo conjunto de práticas sociais do conhecimento, como por exemplo, a pesquisa científica, a investigação policial ou jornalística etc.

De acordo com Chevallard (2009a), cada estudante ou grupo de estudantes engajado em um PER deve ser capaz de investigar qualquer assunto escolhido usando equipamentos praxeológicos da formação básica que a escola tem proporcionado. O autor salienta que a introdução da noção de PER, na sala de aula de Matemática, leva naturalmente a questão da redefinição de um currículo de Matemática PER, no qual ele examina alguns princípios que devem orientar a concepção, a construção e a realização de um ensino renovado, sendo o primeiro princípio não fazer uma AER isolada, mas pelo contrário, conceber e realizar uma AER matemática abrangente, trabalhando-se com temas específicos ou tópicos do programa do ano.

Quando um currículo se forma em torno de uma pedagogia dada, forma-se também uma infraestrutura didática - aqui didática matemática, ou matemática didática - que permite a aplicação desta pedagogia. Uma pedagogia na qual se espera apenas do professor que expõe aos alunos a matéria a estudar, supõe, assim, uma infraestrutura cujo essencial se reduz às “lições”, ou seja, exposições sobre os diferentes temas e assuntos previstos pelo currículo prescrito. No entanto, segundo Chevallard, mesmo a criação destas exposições não é evidente. Ela é facilitada quando, essencialmente, ela retoma de forma apenas transposta “um texto do saber” elaborado na esfera (matemática) científica. Os objetos matemáticos que compõem seu curso e a sua organização vem de outras fontes. É isto que constitui (em parte) o que Chevallard chama de infraestrutura didática composta por exigências e condições pedagógicas, além das organizações matemáticas que exploram estas condições, e respeitando estas exigências (assim como as condições e exigências próprias da disciplina estudada).

De acordo com Chevallard (2009a), esta infraestrutura supõe fundações que o professor isolado ou em associação com outros professores não pode criar. Ainda, ele aponta que criar uma infraestrutura didática matemática adequada a uma pedagogia das AER, revela-se fora de alcance de “simples” professores, e que é provável que tal projeto suponha a mobilização de imensas forças produtivas na disciplina. Portanto, a infraestrutura matemática adequada a uma pedagogia de professor constitui uma obra difícil e rara.

A título de ilustração, abaixo encontra-se um exemplo discutido por Chevallard (2009a).

Quadro 1 – exemplo de infraestrutura

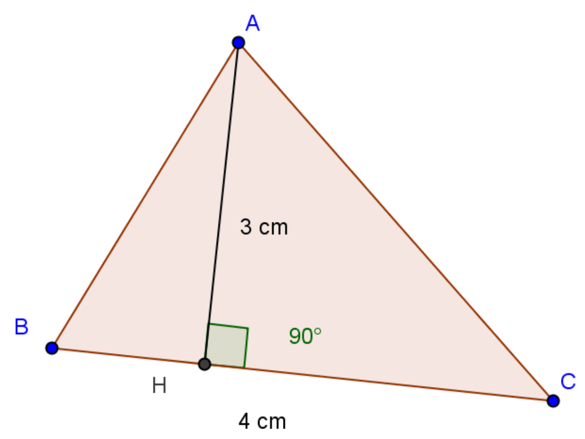
<table>
<tr>
<td>Na 5ª série, em relação ao cálculo de área, qual é a melhor redação?

1) Área do triângulo ABC:

$$\frac{3 \times 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

A área do triângulo ABC é de 6 cm²

2) Área do triângulo ABC:

$$\frac{3\ \text{cm} \times 4\ \text{cm}}{2} = \frac{12\ \text{cm}^2}{2} = 6\ \text{cm}^2$$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Fonte: Chevallard (2009a, p. 9)

Segundo Chevallard (2009a), a primeira forma de fazer, omitindo os símbolos das unidades, é incontestavelmente a forma ainda dominante hoje. Ela se justifica, mas não deve de jeito nenhum conduzir a escrita do tipo $\frac{3\times 4}{2}=\frac{12}{2}=6\,\text{cm}^2$, na qual se iguala "grandezas escalares", aqui $\frac{3\times 4}{2}$ e $\frac{12}{2}$, a uma "grandeza vetorial", aqui 6 cm^2. Temos por mudança de unidade de medida: $6\,\text{cm}^2=6\times(10^{-2}\,\text{dm}^2)=\;0{,}06\,\text{dm}^2$. Para o autor, existe uma "álgebra das grandezas" que conduz notadamente a escrever como segue (por exemplo): $6\,\text{cm}^2=6(10^{-1}\,\text{dm})^2=6(10^{-2}\,\text{dm}^2)=\ldots$. Embora seja ainda largamente estranha à profissão, sem dúvida, é esta maneira de fazer que é valorizada pelos novos currículos prescritos do colégio na França.

Segundo ainda Chevallard (2009a), um dos perigos relacionados com a construção de uma didática do inquérito e do PER nas aulas de matemática está no fato da falta de uma infraestrutura adequada. O esforço para "fazer matemática" em termos de PER corre o risco de ser chanfrada sub-repticiamente pela infraestrutura existente, única conhecida e realmente disponível, para uma pedagogia situada em algum lugar entre a pedagogia da exposição do saber e a do encontro arranjado. Este perigo é ainda mais forte, pois chegou-se a uma fase cuja infraestrutura ainda disponível mostra apenas uma paisagem pífia.

No exemplo seguinte, Chevallard (2009a, p. 14) traz elementos de reflexão que atestam o fato elencado acima.

> a) Demonstrar que todo número da forma $\frac{a}{2^p\times 5^q}$ (com $a\in Z, p\in N, q\in N$) é um decimal (isto é, que ele admite uma escrita fracionária cujo denominador é uma potencia de 10).
>
> b) Nota-se $\frac{a}{b}$ uma fração irredutível que é um decimal (com $a\in Z, b\in Z, b\neq 0$). Demonstre que b pode ser escrito sob a forma $2^p\times 2^q$, (com $p\in N$ e $q\in N$).
>
> c) Enunciar o teorema assim demonstrado nas questões a e b.

De acordo com o autor, a primeira parte leva a estudar casos específicos de números da "forma" $\frac{a}{2^p\times 5^q}$ ($a\in N$). Percebe-se, que passar de números "determinados" à forma geral indicada, constitui um salto alto para alunos da 9ª série do Ensino Fundamental II, pois há aqui, à primeira vista, o risco de uma brutalidade didática caracterizada.

O especialista terá observado que a primeira pergunta supõe apenas instrumentos matemáticos rudimentares, contudo, mostrar que o número $\frac{47}{2^3 \times 5^2}$, por exemplo, é decimal e pode ser feito pondo os fatores 2 e 5 (do denominador) “ao mesmo expoente”, isto é, o expoente maior, que é aqui o de 2, assim, tem-se: $\frac{47}{2^3 \times 5^2} = \frac{47 \times 5}{2^3 \times 5^3} = \frac{235}{10^3} = 0{,}235.$

Vê-se que a aplicação desta técnica sobre a expressão literal $\frac{a}{2^p \times 5^q}$ gera uma dificuldade, pois, ignora-se qual dos expoentes p e q é maior. É necessário, então, fazer uma distinção de casos, o que decorre de um esquema de pensamento matemático praticamente desconhecido neste nível, ou seja, inventar, de acordo com Chevallard, uma nova técnica, tal como a aplicada a seguir:

$$\frac{a}{2^p \times 5^q} = \frac{a \times \left(2^q \times 5^p\right)}{\left(2^p \times 5^q\right) \times \left(2^q \times 5^p\right)} = \frac{a \times 2^q \times 5^p}{\left(2^p \times 2^q\right) \times \left(5^q \times 5^p\right)} = \frac{a \times 2^q \times 5^p}{2^{p+q} 5^{p+q}} = \frac{a \times 2^q \times 5^p}{(2 \times 5)^{p+q}}$$

$$= \frac{a \times 2^q \times 5^p}{10^{p+q}}.$$

Teremos aqui, por exemplo:

$$\frac{27}{2^3 \times 5^2} = \frac{27 \times 2^2 \times 5^3}{2^3 \times 5^2 \times 2^2 \times 5^3} = \frac{27 \times 2^2 \times 5^3}{2^5 \times 5^5} \frac{27 \times 500}{10^5} = \frac{27 \times 5}{10^3} = \frac{135}{10^3} = 0{,}135.$$

De acordo com o autor, é, sem dúvida, um conteúdo matemático que pode ser objeto de estudo em uma sessão de trabalhos dirigidos, ou, mais exatamente, no âmbito de um PER, como prescrito na proposta curricular (França): “Caracterização dos elementos de D e de Q, quer em termos de desenvolvimento decimal finito ou periódico, quer como quociente irredutível de inteiros (o denominador sendo ou não da forma $\frac{a}{2^p \times 5^q}$ $(a \in N)$)”.

Segundo Chevallard (2009), propor esta atividade como trabalho fora da sala de aula, é perder uma ocasião de fazer com os alunos um trabalho matemático significativo, mas, é também entregar estes alunos a um abandono didático contraproducente para a maioria deles. Todo se passa como se a preocupação do bom ajustamento das situações didáticas desse lugar a uma anemia didática, que poderia dar espaço a um temor quase permanente.

Do acordo com Chevallard (2009b, p.99), o equipamento praxeológica dependerá do PER determinado em parte pelas decisões adotadas no quadro do inquérito sobre Q. Neste caso, não há realmente uma análise a priori anterior ao funcionamento do sistema educativo S(X; Y; Q) em que ocorre a investigação. A análise a priori, que na problemática clássica da engenharia didática é a prerrogativa do "engenheiro didático" ou, na melhor das hipóteses, do professor Y, aqui é integrada ao trabalho do sistema didático S(X; Y; Q) e tornou-se, na "análise in vivo", parte integrante do trabalho exigido pelo inquérito, que determina em grande parte o Percurso de Estudo e Pesquisa em que ele ocorre.

Ainda de acordo com o autor (p. 103), a concepção, construção, e realização de cenários de PER apresentam todos os grandes problemas que as pesquisas em didática da matemática, há muito tempo, identificaram. Alguns desses problemas são a devolução (BROUSSEAU, 2004 apud CHEVALLARD, 2009b, p. 103) e a institucionalização no momento do estudo. Ele (p. 103) assevera que uma institucionalização não desequilibrada por uma forte preferência disciplinar, valoriza outras entidades praxeológicas que participam de diversas “disciplinas” e vão ao encontro com a elaboração no y, como X, de uma relação, muitas vezes, inédita com vários tipos de objetos, presentes ou não na formação escolar habitual.

A engenharia didática para o uso (e para usuário) só pode existir, de acordo com Chevallard (2009b, p. 105), em regra geral, em estreita articulação com a pesquisa. Dito de outra forma, tais produções de tal engenharia didática devem ser olhadas, salvo exceção, como sendo em uma versão "beta" - senão "em versão alpha". No estado de desenvolvimento da pesquisa sobre os PER, Chevallard (2009b) coloca a clínica didática de PER como condição de possibilidade de pesquisa e de engenharia em termos de PER, desenvolvimento marcado pela criação, viabilização e ativação de terrenos clínicos, mediante os quais realizações, observações, experiências podem ser muito bem realizadas, levando em consideração as instituições e as pessoas em causa e atendendo as necessidades de pesquisa de engenharia e necessidades de engenharia a pesquisa.

Articulação entre as diferentes engenharias

A engenharia didática de primeira geração consiste em determinar dispositivos de ensino comunicáveis e reprodutíveis. Ela agrega algumas das características da pesquisa ação, já que se desenvolvem nela situações de sala de aula nas quais o pesquisador é levado a descrever e analisar os resultados de sua aplicação, tomando os devidos cuidados em relação ao grau de generalidade dos resultados. Já, na engenharia didática da segunda geração, o objetivo é a produção de recursos que podem ser utilizados pelo professor na sua aula, ou para a formação continuada ou inicial de professores, fazendo com que os professores apreendam a matemática, ou a matemática para ensinar a matemática. Nos quadros 2 e 3 algumas das características dessas engenharias são apresentadas.

Quadro 2 – Engenharias de 1ª e 2ª geração, objetivos e aspectos centrais.

	Objetivo(s)	**Aspectos centrais**
ED 1ª geração	Elaborar e estudar propostas de transposição didática para o ensino.	Metodologia de pesquisa e produto
ED 2ª geração	Determinar os princípios que comandam a engenharia que se quer transformar em recurso para o ensino regular, e estudar as condições de sua divulgação.	Três funções não independentes: a investigação, o desenvolvimento e a formação de professores por meio da análise. Necessita de vários níveis de construção.

Fonte: autores deste artigo.

As engenharias didáticas de primeira e segunda geração são respectivamente chamadas de Engenharia Didática de Investigação (IDR) e Engenharia Didática de Desenvolvimento (IDD), as quais são descritas algumas de suas características no quadro 3.

Quadro 3 – comparando IDR e IDD

Engenharias Didáticas de 1ª e 2ª geração	
IDR	**IDD**
• Faz emergir fenômenos didáticos para estudá-los; • Visa um avanço no resultado de investigação, fazendo uso de experimentações montadas em função da questão de pesquisa; • Não há a preocupação imediata em divulgar as situações utilizadas.	• Produzir recurso (s) para professores ou para a formação de professores. • Liberdade de ação para o professor • A investigação continua a ser essencial, mas, as questões de investigação não são motivadas, em primeiro lugar, pela ampliação dos quadros teóricos; • Baseia-se na engenharia de 1ª geração.

Fonte: autores deste artigo.

Para Chevallard, a engenharia didática para investigação será considerada engenharia didática para o uso, e a engenharia didática de desenvolvimento como engenharia didática para o conhecimento.

Para ele, a engenharia de formação está relacionada ao tratamento da construção de dispositivos de formação, tendo a necessidade de articular objetivos, métodos e conteúdos. Já a engenharia didática profissional está relacionada a tudo o que diz respeito à produção de recursos educativos, utilizando ou não novas tecnologias, sobretudo, os trabalhos estão baseados em situações que servem de apoio à formação e ao desenvolvimento das competências profissionais. Sintetizamos no quadro três alguns dos aspectos centrais da engenharia de PER.

Quadro 4 – aspectos centrais de uma Engenharia de PER

	Objetivo(s)	**Aspectos centrais**
Percurso de Estudo e de Investigação (PER)	• Categorizar um conjunto de práticas sociais de conhecimento. • Sistema didático: *S* (*X*, *Y*, *Q*), sendo Q a questão a ser respondida, X o grupo de estudo e Y a equipe responsável em auxiliar o estudo.	• O conhecimento (matemático), não é algo que é conhecido de antemão, este surgirá durante a investigação, junto às discussões realizadas com os alunos. • Questões geradas a partir de uma PER devem ser tomadas para melhorar a investigação ou retomá-la. • O estudo é um projeto que assume um desenvolvimento em longo prazo (local de aprendizagem muito relevante). • Estabelece níveis de trabalho • Exige dos professores uma revisão de sua relação com o saber. • Um dos perigos relacionados com a construção de uma didática do inquérito e dos PER, em classes de matemática, está no fato de falta de uma infraestrutura adequada.

Fonte: os autores destes artigos.

Boero, diferentemente de Chevallard e Perrin-Glorian, propõe uma engenharia didática voltada ao ensino, em que o principal conceito é o de "domínio de experiência", isto é, com já dito, uma área da cultura humana que se desenvolve na classe pelo intermédio da ação da mediação do professor segundo sua cultura e intenções, a evolução das práticas e concepções dos alunos sobre esse domínio. No quadro quatro, são apresentadas algumas características da engenharia dos Domínios de Experiência.

Quadro 5 – Aspectos centrais da engenharia dos Domínios de Experiência

	Objetivo(s)	Aspectos centrais
Domínios de experiência	• Correlacionar as principais disciplinas e ensinar matemática • O processo de enculturação nas atividades é o cerne do trabalho em classe	• Inspirado em Vygotsky; • Escolha do tema não necessariamente matemático; • Permite a mediação (por parte do professor) de ferramentas matemáticas por meio de sua resolução; • Análise pode ser feita de acordo com diferentes perspectivas teóricas

Fonte: autores deste artigo.

Artigue (2009) afirma que todas essas engenharias estão voltadas para

> a concepção, implementação e avaliação de dispositivos didáticos tendo objetivos bem definidos, e apoiados claramente sobre bases teóricos, e suscetíveis de ser objeto de um discurso tecnológicos no sentido da teoria antropológica do didático [...], a implementação tomando lugar em um sistema didático institucional (Escola, IUFM, mas também centro de férias...), com dispositivo principal ou dispositivo auxiliar.(p. 225).

Ainda de acordo com Artigue, essas engenharias têm diversos objetivos: exploração de organizações matemáticas e/ou didáticas, testagem de hipóteses ou de construções teóricas, estudo do funcionamento de sistemas didáticos em dadas condições, produção de recursos (objetos de aprendizagem) para o ensino de um dado tema, construção de dispositivos de formação de professores, acompanhamento ou preparação da evolução de currículos locais ou globais, etc.

Bessot (2009 apud ARTIGUE, 2009, p. 227) evidenciou muito bem a profundeza das relações históricas tecidas entre a engenharia didática da primeira geração e a teoria das situações didáticas (TSD). Ela aponta que a engenharia está no coração do didático[3], sendo ao mesmo tempo:

- O indispensável instrumento de confrontação da ciência didática com a contingência;
- O instrumento e o objeto das observações;

[3] Chevallard (2009b, p. 89-90) dá a seguinte definição ao termo "o didático": Digamos que, em uma situação institucional dada, há *"o didático"* quando uma instância U (pessoa ou instituição) da situação quer fazer (ou faz) algo - "um gesto didático" - para que alguma instância V (pessoa ou instituição) se modifique de uma maneira desejada em sua relação com alguma obra ♥.

- e o meio de elaboração e de difusão de seus resultados para os professores e o público.

Bessot (2009, apud ARTIGUE, 2009, p. 227) destaca, ainda, a importância da articulação de três abordagens:

- uma abordagem pela articulação de situações por cadeias” lógicas (a dependência dos saberes),
- uma abordagem pela aproximação de situações por sua semelhança semântica,
- uma abordagem pela articulação de situações pelo encadeamento dos questionamentos associados.(tradução nossa)

Esta autora aponta a necessidade da primeira e terceira articulações para permitir controlar a possibilidade de transformar as causas em razões do saber, enquanto que a segunda vem da necessidade de conceber as causas da aprendizagem.

Bessot (2009 apud ARTIGUE, 2009, p. 27), falando da distinção entre as causas e as razões do saber, declara:

> O fundamento da engenharia didática não é somente conceber causas de aprendizagem de um saber, isto é, situações, mas também causas pertinentes com relação às razões do saber, ou seja, situações que tornam possível uma transformação das causas em razões. (tradução nossa)

Um dos pontos importantes da engenharia didática (de primeira geração e de segunda geração) é o controle, momento em que é imprescindível levar em consideração os seguintes elementos apontados por Perrin-Glorian (2009 apud ARTIGUE, 2009, p. 229):

> a pertinência epistemológica das situações e sua sucessão; o jogo das variáveis didáticas que permite o ressurgimento dos problemas; o potencial adidático teórico do “milieu” inicial para a ação do aluno para a ação conjunta do professor e do aluno.(tradução nossa)

Chevallard (2009b), como visto na parte deste artigo que trata da engenharia de PER, tinha por objetivo principal a refundação da engenharia didática, apoiando-se na noção de PER. Segundo Artigo (2009), no seu projeto de refundação, Chevallard (2009b) distinguiu três problemáticas: problemática de base, problemática possibilista e problemática primordial, que foram definidas da seguinte forma:

> - Problemática de base: Sendo dado um conjunto de condições e restrições, pesando sobre tal instituição ou tal pessoa, sob quais conjuntos de condições essa instituição ou essa pessoa poderia integrar ao seu equipamento praxeológica tal entidade praxeológica designada?
> - Problemática possibilista: Sendo dado um conjunto de condições e de restrições de que tal instituição ou tal pessoa é submetida, a quais sistemas praxeológicos é possível que essa instituição ou essa pessoa tenha acesso?
> - Problemática primordial: Sendo dado um projeto de atividade no qual tal instituição ou tal pessoa pensa em se engajar, qual é para esta instituição ou esta pessoa, o equipamento praxeológico que pode ser julgado indispensável ou simplesmente útil na concepção e no cumprimento desse projeto? (CHEVALLARD, 2009b apud RTIGUE, 2009, p. 230, tradução nossa)

Segundo Artigue (2009), pode-se perceber a distancia que se instaura com a engenharia didática baseada na teoria das situações didáticas "desde que passamos da primeira à segunda das problemáticas em que, em termos de PER, quando se passa de PER disciplinares finalizados a PER codisciplinares abertos" (p. 230). A diferença é nítida nos PER codisciplinares abertos, devido à ausência da finalização da praxeologia, mas também nos PER finalizados no que diz respeito ao "milieu" e "a mesogênese, ao espaço reservado às respostas culturais acessíveis às questões de estudo, no que diz respeito, também, mais globalmente, o que se procura aperfeiçoar e controlar por intermédio da engenharia didática" (ARTIGUE, 2009, p.230-231). Uma diferença reside também na ausência da análise a priori na engenharia de PER, essa análise é fundamental nas engenharias didáticas de primeira e segunda geração.

No que diz respeito à engenharia dos Domínios de Experiência, Boero (2009) aponta uma oposição entre sua abordagem e a teoria das situações didáticas, focando especificamente a dimensão de aculturação que, para ele, não seria levada em consideração na TSD. Para Artigue (2009, p.233) é uma visão minimalista da TSD, pois,

> De um lado, a tomada em conta da dimensão da aculturação é, para aqueles que entram em contato com a teoria das situações, menos visível do que a dimensão de aprendizagem por adaptação. Por outro, é por intermédio dos desenvolvimentos teóricos mais recentes como os em termos da teoria da ação, por exemplo, já

> mencionados, que será possível chegar a um nível de sofisticação teórica capaz de levar em consideração a complexidade desses processos de aculturação. (tradução nossa)

A intenção, neste artigo, é trazer à tona as discussões recentes em torno da noção de Engenharia Didática. Portanto, espera-se que a proposta de mostrar com profundidade o conceito de Engenharia neste trabalho tenha sido atingida. O presente estudo foi realizado sobre esta noção, que tem, de acordo com Artigue (2009, p.236), uma "dimensão fundadora para nossa comunidade". Acredita-se, também, com este trabalho ter levado a percepção de quanto a noção de Engenharia Didática evoluiu e tem se diversificado nos últimos trinta anos, além da compreensão da razão de ser esta metodologia na história da Educação Matemática. Portanto, há concordância com Artigue (2009, p.237), quando afirma que o estudo permitiu

> [...] determinar o que, para nós, está no coração desta noção, o que queremos conservar nela no esforço de refundação necessária, e pensar também as adaptações e articulações a trabalhar, para organizar a diversidade das formas existentes e chegar a expressar, por intermédio de um objeto refundado, uma concepção compartilhada do *design* didático.

Referências

ARTIGUE, M. **Ingénierie Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, p. 281-308, 1998.

ARTIGUE, M. L´ingénierie didactique: un essai de synthèse. in Margolinas et all.(org.): En amont et en aval des ingénieries didactiques, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme). **Recherches em Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, v. 1, p. 225-237, 2009.

BESSOT, A. L´ingénierie didactique au coeur de la théorie des situations. *in* Margolinas et all.(org.) : En amont et en aval des ingénieries didactiques, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme). **Recherches em Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, v. 1, p. 29-56, 2009 .

BOERO, P. Les domaines d´expérience dans l´enseignement – Apprentissage des mathématiques: Lier le travail scolaire a l´experience des eleves, *in* Margolinas et all.(org.) : En amont et en aval des ingénieries didactiques, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme). **Recherches em Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, v. 1, p. 111-148, 2009.

BROUSSEAU, G. Premières notes sur l´observation des pratiques de classes. **Journée VISA**, INRP, 2008. In: <http://visa.inrp.fr/visa/reseau/seminaires/journees-inaugurales-14-et-15-mai-2009-1/premieres-notes-sur-lobservation-des-pratiques-de-classe> (acesso, 06/07/2010)

CHEVALLARD, Y. **La notion de PER**: problèmes et avancées, 2009a, In: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER_problems_et_avancees.pdf>.

CHEVALLARD, Y. La notion d´ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et élémentos de réponses à partir de la TAD. in Margolinas et all.(org.) : En amont et en aval des ingénieries didactiques, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme). **Recherches em Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, , v. 1, p. 81-108, 2009b.

DOUEK, N. Une caractérisation de la conceptualisation, son utilisation pour la conception, la gestion et l´analyse de situations de la didactique des domaines d´expériênce. In Castela e Houdement (orgs.) **Actes du séminaire national de didactique des mathémtiques**, ARDM e IREM de Paris 7, p. 263-284, 2005.

PERRIN-GLORIAN, M. J**.** L'ingénierie didactique a l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formação des enseignants. in Margolinas et all.(org.): En amont et en aval des ingénieries didactiques, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme). **Recherches em Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, v. 1, p. 57-78, 2009.